TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

MIKKO-PEKKA NIEMISTÖ
ÄÄRETÖNULOTTEISET MATRIISIT JONOAVARUUKSISSA

Diplomityö

Tarkastajat:
Professori Seppo Pohjolainen
Tutkijatohtori Petteri Laakkonen
Tarkastaja ja aihe hyväksytty
Luonnontieteiden tiedekunnan tiedekun-
taneuvoston kokouksessa 09.09.2015

TIIVISTELMÄ

MIKKO-PEKKA NIEMISTÖ: Ääretönulotteiset matriisit jonoavaruuksissa
Tampereen teknillinen yliopisto
Diplomityö, 84 sivua
Lokakuu 2015
Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma
Pääaine: Matematiikka
Tarkastajat: Professori Seppo Pohjolainen ja Tutkijatohtori Petteri Laakkonen
Avainsanat: funktionaalianalyysi, jonoavaruudet, Kojima-Schurin lause, resolventtijoukko, Silverman-Toeplitzin lause, spektri, suppeneminen, ääretönulotteiset matriisit

Tässä diplomityössä käsitellään ääretönulotteisia matriiseja ja niiden käyttöä matematiikassa. Ääretönulotteisella matriisilla tarkoitetaan matriisia, jolla on äärettömän monta pysty– ja vaakariviä. Toisaalta myös jono voidaan esittää ääretönulotteisena vektorina, jolloin jonojen muunnoksia voidaan esittää matriisilaskennasta tutuin keinoin. Tällöin on tarpeen tarkastella jonojen suppenemista. Ääretönulotteisten matriisien käyttö eroaa suuresti äärellisulotteisesta tapauksesta.

Työssä tutustutaan ensin jonoihin, jotka tässä työssä ymmärretään ääretönulotteisina vektoreina ja tutkitaan niiden yleisiä ominaisuuksia. Toisena tutustutaan äärellisulotteisiin matriiseihin sellaisenaan ja katsotaan mitä ominaisuuksia tällaisilla matriiseilla on. Työn loppupuolella tutkitaan ääretönulotteisten matriisien toimimista lineaarisina ja rajoitettuina operaattoreina, joka onkin suurin äärellisulotteisten matriisien sovelluskohde. Lisäksi tutkitaan ääretönulotteisen matriisin spektriä ja resolventtjoukkoa. Tässä työssä havaitaan, että yleistä teoriaa ei ole olemassa äärellisulotteisille matriiseille ja työ keskittyykin paljolti esimerkkeihin. Kuitenkin joitain lauseita, kuten Silverman-Toeplitzin lause ja Kojima-Schurin lause, on esitetty ja todistettu tässä diplomityössä. Äärellisulotteisten matriisien käsittely edellyttää funktionaalianalyysin tietojen hallintaa.

Työssä on tukeuduttu suurelta osin R. G. Cooken kirjaan *Infinite Matrices & Sequence Spaces* ja I. J. Maddoxin kirjaan *Elements of Functional Analysis*. Kirjoissa olevia lauseita ja tuloksia on pyritty laajentamaan ja selventämään vaikeita kohtia.

Työn visiona oli esittää ääretönulotteisten matriisien ominaisuudet ja käyttö yleistajuisella tavalla ja osoittaa niiden käyttökelpoisuus matematiikan eri haaroissa.

ABSTRACT

MIKKO-PEKKA NIEMISTÖ: Infinite Matrices in Sequence Spaces
Tampere University of Technology
Master's Thesis, 84 pages
October 2015
Master's Degree Programme in Science and Engineering Technology
Major: Mathematics
Examiners: Professor Seppo Pohjolainen and Postdoctoral Researcher Petteri Laakkonen
Keywords: convergence, functional analysis, infinite matrices, Kojima-Schur theorem, operator, resolvent set, Silverman-Toeplitz theorem, sequence spaces, spectrum

This thesis is a study of infinite matrices and their usage in mathematics. An infinite matrix is a matrix that has infinitely many rows and columns. On the other hand a sequence can be represented as an infinite vector making it possible to express sequence transformations as matrix notation. Then it is necessary to consider sequence convergence. The usage of infinite matrices differs greatly from usage of finite matrices.

In this thesis the focus is first on sequences which are represented as infinite vectors. Their general properties are then considered. Secondly infinite matrices are considered as they are and general properties of such matrices are presented and proofed. At the conclusion of this thesis the infinite matrices are considered as linear bounded operators which is the main use of this kind of matrices. The thesis considers spectrum and resolvent set of infinite matrices as well. The study discovers that no general theory exists for infinite matrices and this thesis focuses mainly on examples. However, some theorems for infinite matrices such as Silverman-Toeplitz theorem and Kojima-Schur theorem are presented and proofed. The treatment of infinite matrices requires some knowledge of functional analysis.

This thesis is mainly based on the book *Infinite Matrices and Sequence Spaces* by R.G Cooke and *Elements of Functional Analysis* by I.J Maddox. The theorems and results in these books are expanded and clarified in this thesis.

The vision behind this thesis was to represent the properties of infinite matrices and their usage in a popular manner and show their feasibility in many branches of mathematics.

ALKUSANAT

Tämä diplomityö on tehty Tampereen Teknillisen Yliopiston matematiikan laitoksella kesän ja syksyn 2015 aikana. Työn aiheen sain kesäkuussa 2015 professori Seppo Pohjolaiselta muutaman palaverin jälkeen. Kiinnostukseni matriiseihin ja niiden ominaisuuksiin heräsi jo opiskellessani peruskursseja matriiseista. Työtä olen saanut tehdä sekä kotonani, että matematiikan laitoksen työpisteellä, mistä on ollut suuri apu.

Tästä diplomityöstä kiitokset kuuluvat professori Seppo Pohjolaiselle ja tutkijatohtori Petteri Laakkoselle erittäin mielenkiintoisesta aiheesta, jota on ollut ilo työstää ja lisäksi rakentavasta palautteesta työtä koskien. Erityiskiitos kuuluu myös tutkijatohtori Timo Hämäläiselle vaikeiden ja haastavien kohtien selvittämisessä. Kiitokset haluan esittää myös tyttärelleni Lotalle iloisesta hymynaamasta. Suuret kiitokset esitän myös tyttöystävälleni Pauliinalle, joka on ollut suurena tukena työtä tehdessä. Kiitän myös Jeremiaa englannin kielen oikoluvusta. Lisäksi kiitän Tampereen Vapaakirkkoseurakuntaa, jolla on ollut elämässäni todella iso merkitys. Haluan myös kiittää perhettäni rahallisesta ja henkisestä tuesta vaikeina ja helppoina aikoina.

Tampereella 2.10.2015

Mikko-Pekka Niemistö

SISÄLLYS

MERKINNÄT

Merkintä	**Selitys**
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Sisätulo 9
$\|\cdot\|$	Normi 11
$\lvert\cdot\rvert_b$	Matriisin raja 27
$\lambda, \alpha, \beta, \sigma$	Skalaareja 4
$\prod_{n=1}^{k} a_n$	Tulo $(a_1 a_2 \cdots a_k)$ 79
$\delta_{i,j}$	Kroneckerin delta 23
$\overline{x}$	Skalaarin x kompleksikonjugaatti 12
$\rho(T)$	Operaattorin T resolventtijoukko 58
$\sigma(T)$	Operaattorin T spektri 58
A, T	Matriisi tai operaattori 21
$[a, r)$	Puoliavoin väli 75
A^*, T^*	Matriisin konjugaattitranspoosi tai operaattorin adjungoitu operaattori 50
$(a_{i,j})$ $(A)_{i,j}$	Matriisin A i:n vaakarivin ja j:n pystyrivin alkio 21
$T \in B(H)$	T on lineaarinen ja rajoitettu operaattori ja $T : H \mapsto H$ 47
$\mathbb{C}$	Kompleksilukujen joukko 9
c	Suppenevien jonojen avaruus 6
c_0	Nollaan suppenevien jonojen avaruus 6
$C_0(\mathbb{N})$	Katkaistujen jonojen joukko 17
$d(x, y)$	Kahden avaruuden alkion etäisyys toisistaan 4
$\mathscr{D}(T)$	Operaattorin T määrittelyjoukko 47
I	Identiteettimatriisi tai identiteettioperaattori 22
A^{-1}, T^{-1}	Matriisin tai operaattorin inverssi 23
ℓ^p	Jonoavaruus, jossa on määritelty p-normi 8
ℓ^∞	Jonoavaruus, jossa on määritelty ∞ - normi 5
$\mathbb{N}$	Luonnollisten lukujen joukko 7
$M \times M$	Kahden avaruuden karteesinen tulo 4
$\mathscr{N}(T)$	Operaattorin T nolla-avaruus 47
$\mathbb{R}_+$	Positiivisten reaalilukujen joukko 4
$\mathscr{R}(T)$	Operaattorin T kuva-avaruus 47
R_λ	Operaattorin tai matriisin resolventti 57
$\Re(z)$	Kompleksiluvun z reaaliosa 12

1. JOHDANTO

Matriisilaskenta on eräs perustavanlaatuisimpia matematiikan haaroja. Matriisilaskennan avulla voidaan helposti ratkoa suurehkojakin lineaarisia yhtälöryhmiä ja sillä on sovelluskohteensa myös monissa tilastotieteen ja fysiikan haaroissa. Kuitenkin suurin osa matriisien teoriaa keskittyy äärellisulotteisiin matriiseihin, eikä yleistä teoriaa ole olemassa ääretönulotteisista matriiseista [2, s.1].

Ääretönulotteinen matriisi on matriisi, jolla on äärettömän monta saraketta ja riviä. Mikäli jokin matriisin alkio on ääretön, sanotaan, että matriisia ei ole olemassa. Juurikin ääretönulotteisuus tekee ääretönulotteisten matriisien käsittelystä hankalaa ja sen takia yleistä teoriaa ei ole ollut helppo kehittää. Kuitenkin jotkin äärellisulotteisten matriisien teoriat voidaan yleistää koskemaan myös ääretönulotteisia matriiseja. On huomattava, että esimerkiksi determinantin laskeminen äärellisulotteiselle matriisille ei suoraan onnistu teorian avulla ja myös ominaisarvojen määrittäminen on hankalaa yleiselle ääretönulotteiselle matriisille. [2, s.13]

Suurin sovelluskohde ääretönulotteisilla matriiseilla on jonoavaruuksien välisinä operaattoreina toimiminen. [10, s.161] Monet lineaariset ja rajoitetut operaattorit jonoavaruuksien välillä voidaan esittää ääretönulotteisina matriiseina, jolloin voidaan hyödyntää matriisilaskennan antamia keinoja jonoavaruuksien käsittelyyn. Ääretönulotteisten matriisien käsittely vaatii kuitenkin tarkkuutta ja erityisesti suppenemista on tärkeä tutkia tarkoin, sillä aina esimerkiksi kahden ääretönulotteisen matriisin tuloa ei ole olemassa. Peruslaskutoimitukset toimivat sekä äärellis– että ääretönulotteisilla matriiseilla samaan tapaan [2, s.1].

1.1 Työn sisältö

Työ jakautuu neljään osaan. Ensimmäisessä osassa tutkitaan jonoavaruuksien yleisiä ominaisuuksia, sillä ne muodostavat pohjan ääretönulotteisten matriisien käytölle. Luvussa esitellään tässä työssä käytetyimmät jonoavaruudet ja todistetaan näille muutamia tärkeitä ominaisuuksia, kuten millaista normia käytetään kussakin jonoavaruudessa, ja ehtoja milloin jokin jono kuuluu johonkin tiettyyn jonoavaruuteen. Lisäksi todistetaan kaksi tärkeää epäyhtälöä, Cauchy-Schwarzin epäyhtälö ja Hölderin epäyhtälö, joita tarvitaan tulevissa luvuissa. Kappale määrittelee myös metriikan aksioomat. Lisäksi tutustutaan Hilbert-avaruuksiin. Koska ääretönulotteisen matriisin käsittely johdattaa tarkastelemaan eri jonojen suppenemista, niin luvussa annetaan erilaisia suppenemiskriteereitä jonoille. Lisäksi tutustutaan Cauchy-jonon käsitteeseen.

Toinen luku esittää ääretönulotteiset matriisit sellaisenaan ja määritellään ääretönulotteisten matriisien yleiset ominaisuudet, kuten kahden matriisiin yhteenlasku ja kertolasku. Lisäksi tutustutaan ääretönulotteisen matriisin inverssin laskentaan ja todistetaan muutama lause sekä annetaan aiheeseen liittyen esimerkkejä. Luvussa tutustutaan käsitteeseen matriisin raja, jonka avulla voidaan määrittää joidenkin ääretönulotteisten matriisien inverssejä. Luvun loppupuoli käytetään ehkä tärkeimpään ääretönulotteisen matriisin sovelluskohteeseen, nimittäin jonojen ja sarjojen muunnoksiin ääretönulotteisella matriisilla. Luvussa annetaan riittävät ja välttämättömät ehdot sille, milloin matriisi voi muuntaa jonoja ja sarjoja erityisesti jonon tai sarjan raja-arvon muuttumatta. Lisäksi luvussa esitellään muutamia tällaisia muunnosmatriiseja ja todistetaan niiden toteuttavan vaaditut ehdot.

Kolmannessa luvussa esitellään lineaariset ja rajoitetut operaattorit ja tutkitaan näiden yleisiä ominaisuuksia, kuten mitä tarkoitetaan lineaarisella ja rajoitetulla operaattorilla ja minkälainen on operaattorin nolla-avaruus ja kuva-avaruus. Lisäksi tarkastellaan milloin operaattori on jatkuva sekä milloin operaattori on tiheästi määritelty. Luvussa määritellään operaattorin inverssi ja todistetaan tärkeä Neumannin sarja, jonka avulla voidaan määrittää joidenkin operaattoreiden inverssi. Kappaleessa esitetään ja todistetaan Banach-Steinhausin lause, joka on tärkeä normiavaruuksien teoriassa. Luvun lopussa tutkitaan operaattorin spektriä ja resolventtia.

Työn loppupuolella tutkitaan, miten lineaariset ja rajoitetut operaattorit voidaan esittää matriisina, ja mitä ominaisuuksia tällöin matriisilta vaaditaan. Yleistä teoriaa ei aiheen hankaluuden vuoksi pyritä esittämään, vaan työssä tutustutaan tärkeimpiin lineaarisiin operaattoreihin ja niiden matriisiesityksiin. Kuitenkin useissa lähteissä esitetyt Silverman-Toeplitzin lause ja Kojima-Schurin lause esitetään ja todistetaan.

Työn lopussa tutkitaan myös ääretönulotteisten matriisien spektriä ja resolventtijoukkoa. Esimerkkejä otetaan kolme, ja etsitään näiden resolventtijoukko ja spektri ääretönulotteisten matriisien avulla. Luvussa ei pyritä löytämään yleisiä lauseita vaan luku on hyvin esimerkkivetoinen.

Tämän diplomityön lukijan odotetaan tuntevan funktionaalianalyysin perusteet ja lisäksi reaalianalyysin perustulokset, kuten pienimmän ylärajan ominaisuudet. Näihin voi tutustua esimerkiksi lähteissä [8] [14] [18].

2. JONOAVARUUDET

Tässä diplomityössä käsitellään erilaisia jonoavaruuksia, jonka alkiot ovat joko reaalilukuja tai kompleksilukuja. *Jonoavaruus* voidaan ajatella äärellisulotteisen *vektoriavaruuden* yleistyksenä, jolloin jonoavaruutta voidaan sanoa vektoriavaruudeksi. Jono on siis *ääretönulotteinen vektori*, jonka alkiot ovat kompleksiskalaareja. Tässä luvussa esitellään jonoavaruuksien yleisiä ominaisuuksia ja todistetaan muutama tärkeä lause, joita tullaan käyttämään myös muissa kappaleissa tässä diplomityössä. Tämä luku seurailee pääosin lähteitä [8] ja [14], mutta todistuksia on pyritty laajentamaan ja selventämään ja lukijalle jätettyjä kohtia on lisätty tähän diplomityöhön. Tässä luvussa tarkastellaan *metriikkaa*, joka kertoo kahden avaruuden alkion, esimerkiksi kahden jonon, etäisyyden toisistaan. Metriikasta siirrytään tarkastelemaan jonoavaruuden *normeja* ja tarkastellaan myös *sisätuloa* jonoavaruuksissa. Jonoavaruudessa, kuten äärellisessä vektoriavaruudessa, ajatellaan kahden jonon summauksen tapahtuvan alkioittain, eli

$$x + y = (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) = (y_n + x_n) = y + x.$$

Skalaarilla kertominen tapahtuu normaalin tapaan: $\lambda x = \lambda(x_n) = (\lambda x_n)$. On myös huomattava, että yhteenlasku ja skalaarilla kertominen täytyy pysyä sen jonoavaruuden alkiona, missä laskutoimitus tapahtuu. *Nollajono* on jono, jolle $x + 0 = (x_n) + (0) = (x_n + 0) = (x_n) = x$. Lisäksi $x - x = (x_n) + (-x_n) = (x_n - x_n) = (0) = 0$. Nämä ominaisuudet toteuttavaa jonoavaruutta kutsutaan *lineaariseksi avaruudeksi.*

Annetaan seuraavassa metriikan aksioomat ja sen jälkeen määritellään tässä diplomityössä käytetyt jonoavaruudet.

Määritelmä 2.1. *Olkoon M joukko ja $d(\cdot,\cdot) : M \times M \mapsto [0,\infty)$ siten että*

1. $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in M$

2. *$d(x, y) = 0 \iff x = y$*

3. *$d(x, y) = d(y, x)$*

4. *$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (kolmioepäyhtälö)*

Tällöin avaruutta (M, d) kutsutaan metriseksi avaruudeksi.

Metriikan avulla on mahdollista määritellä avoin tai suljettu pallo. Annetaan tämä määritelmä seuraavaksi.

Määritelmä 2.2. *Olkoon $a \in X$, missä (X, d) on metrinen avaruus. Silloin jokaiselle $r > 0$*

$$S(a, r) = \{x \in X |\ d(a, x) < r\}$$

on avoin pallo, jonka keskipiste on a ja säde r. Suljettu pallo määritellään seuraavasti:

$$S[a, r] = \{x \in X | d(a, x) \leq r\} .$$

Tässä diplomityössä tarkastellaan pääasiassa jonoavaruuksia ℓ^p ja niistä erityisesti jonoavaruuksia ℓ^1 ja ℓ^2. Lisäksi tarkastellaan jonoavaruutta ℓ^∞. Jonoavaruuden ℓ^∞ määritelmä poikkeaa hieman yleisestä ℓ^p avaruudesta. Avaruus ℓ^∞ sisältää myös kaikki rajoitetut jonot. Määritellään seuraavaksi nämä avaruudet.

Määritelmä 2.3.

ℓ^p on jonoavaruus ($p \in [1, \infty)$), jolle pätee

$$\ell^p : \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \middle|\ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty,\ x_i \in \mathbb{C}\ \forall i \right\} .$$

ℓ^∞ on jonoavaruus, jolle pätee

$$\ell^\infty : \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)|\ |x_i| < M, x_i \in \mathbb{C}\ \forall i, M \in \mathbb{R}_+\} .$$

Muita jonoavaruuksia, joita tässä diplomityössä käytetään, ovat jonoavaruudet c,c_0 ja $C_0(\mathbb{N})$. Annetaan seuraavassa niiden määritelmät.

Määritelmä 2.4. *Avaruus c on jonoavaruus, joka sisältää kaikki suppenevat jonot. Avaruus c_0 sisältää kaikki jonot, jotka suppenevat kohti 0:aa.*

Määritelmä 2.5. *Avaruus $C_0(\mathbb{N})$ on jonoavaruus, joka sisältää kaikki katkaistut jonot, toisin sanoen $x \in C_0(\mathbb{N})$ jos on olemassa $N_x \in \mathbb{N}$ siten että $x_n = 0$ kun $n \geq N_x$.*

Tässä diplomityössä tarkastellaan myös jonoavaruuksia, jotka ovat jonkin toisen jonoavaruuden aliavaruuksia. Annetaan seuraavassa määritelmä aliavaruudelle.

Määritelmä 2.6. *Lineaarisen avaruuden X aliavaruus on epätyhjä joukko M, jolle*

$$\lambda x + \mu y \in M \ \forall x, y \in M \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Seuraus 2.7. *Jonoavaruudet c ja c_0 ovat avaruuden ℓ^∞ aliavaruuksia.*

Todistus. Tarkastellaan aluksi jonoavaruutta c. Tarkastelu tässä todistuksessa on vastaava jonoavaruudelle c_0. Selvästi nollajono $(0) \in c$, eli avaruus c on epätyhjä. Olkoon $(x_n), (y_n) \in c$, ja $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ sekä $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Olkoon lisäksi $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Nyt jonoavaruuden ollessa lineaarinen saadaan

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda x_n + \lim_{n\to\infty} \mu y_n = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n + \mu \lim_{n\to\infty} y_n = \lambda x + \mu y.$$

jonoavaruudessa c. Jono siis suppenee ja tällöin $\lambda(x_n) + \mu(y_n) \in c$. Siten c ja c_0 ovat jonoavaruuden ℓ^∞ aliavaruuksia. □

Kappaleissa 4 ja 6 tarvitaan käsitettä tiheä joukko. Annetaan tämän määritelmä seuraavaksi.

Määritelmä 2.8. *Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Joukko $A \subset M$ on tiheä joukossa $B \subset M$ jos*

$$\forall b \in B \ \forall \epsilon > 0 \ \exists \ a_\epsilon \in A \text{ siten että } d(b, a_\epsilon) < \epsilon.$$

2.1 Jonot ja sarjat metriikassa

Jonojen ja sarjojen tutkimiseksi metriikassa tarvitaan käsitteitä suppeneminen, Cauchy-jono ja jonon rajoittuneisuus. Määritellään nämä seuraavaksi.

Määritelmä 2.9. *Jono $(x_n) \in M$ suppenee kohti $x \in M$ jos*

$$d(x, x_n) \to 0, \ \textit{kun } n \to \infty \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists \, n_\epsilon \in \mathbb{N} \textit{ siten että } n > n_\epsilon \implies d(x, x_n) < \epsilon.$$

Pistettä x sanotaan jonon (x_n) raja-arvoksi.

Lause 2.10. *Jokaisen suppenevan jonon raja-arvo on yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoon (x_n) suppeneva jono. Mikäli $(x_n) \to x$ ja $(x_n) \to y$ metriikassa d, niin kolmioepäyhtälön nojalla pätee

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0 \textit{ kun } n \to \infty.$$

Siten $d(x, y) = 0$ ja metriikan ominaisuuksien nojalla $x = y$. Siis suppenevan jonon raja-arvo on yksikäsitteinen. □

Määritelmä 2.11. *Jonoa $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots)$, jossa $x_n \in V$, jossa V on metrinen avaruus, kutsutaan Cauchy-jonoksi jos $\forall \epsilon > 0 \, \exists \, N \in \mathbb{N}$ siten että*

$$d(x_n, x_m) < \epsilon,$$

kun $m, n > N$.

Seuraus 2.12. *Jokainen suppeneva jono on Cauchy-jono.*

Todistus. Olkoon jono $(x_n) \in M$ suppeneva. Tällöin $d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ ja samoin myös $d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$ kun $m, n > n_\epsilon$. Koska metriikan ominaisuuden 4 nojalla pätee

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

kun $m, n > n_\epsilon = N$, niin suppeneva jono on täten Cauchy-jono. $\square$

Seuraus 2.13. *Jos Cauchy-jonolla on suppeneva osajono, niin koko jono on suppenee.*

Todistus. Olkoon jono (x_n) Cauchy-jono ja oletetaan, että osajono (x_{n_k}) suppenee. Tällöin $x_{n_k} \to x$ kun $k \to \infty$. Kolmioepäyhtälön nojalla pätee

$$0 \leq d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x).$$

Jos (x_n) on Cauchy-jono, niin termi $d(x_n, x_{nk})$ voidaan valita mielivaltaisen pieneksi. Tällöin siis $d(x_n, x) \to 0$, joten Cauchy-jono (x_n) suppenee kohti samaa raja-arvoa kuin osajono (x_{n_k}). $\square$

Määritelmä 2.14. *Jonoa sanotaan rajoitetuksi, jos* $\exists\ M \geq 0$ *siten että* $|x_n| \leq M$ *jokaiselle* $n \in \mathbb{N}$.

Seuraus 2.15. *Jokainen suppeneva jono on rajoitettu.*

Todistus. Olkoon (x_n) suppeneva jono, ja $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Koska (x_n) suppenee, niin $\forall \epsilon > 0\ \exists\ N > n$ siten että $|x_n - x| < \epsilon$. Tämä on tosi myös silloin, kun $\epsilon = 1$. Silloin $\exists\ N_1$ siten että $\forall n > N_1$ pätee $|x_n - x| < 1$. Tällöin käyttämällä kolmioepäyhtälöä saadaan

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| \leq 1 + |x|\,.$$

Huomataan, että $|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\}$ jokaiselle $n \leq N_1$. Tällöin asettamalla $M = \max\{|x_1|, \ldots, |a_N|, 1 + |x|\}$, niin $|x_n| \leq M$ jokaiselle n. $\square$

Määritelmä 2.16. *Metrinen avaruus* (M, d) *on täydellinen, mikäli jokainen sen Cauchy-jono suppenee* M*:ssä.*

2.2 Sisätuloavaruus

Yksi tärkeä ominaisuus vektoriavaruuksille on sisätulo. On huomioitava, että kaikki avaruudet (esimerkiksi yleinen ℓ^p avaruus) eivät ole sisätulollisia. Sisätulo kuvaa avaruuden kaksi alkiota skalaariksi. Seuraavassa on annettu sisätulon aksioomat.

Määritelmä 2.17. *Olkoon V vektoriavaruus. Sisätulo on kuvaus $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{C}$ siten että*

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ $\forall x, y \in V$
2. $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$ $\forall x_1, x_2, y \in V$ *ja* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *ja* $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Vektoriavaruutta, jonne on määritelty sisätulo, kutsutaan *sisätuloavaruudeksi*. Yksi tärkeä sisätulon ominaisuus on *Cauchy-Schwarzin epäyhtälö*, jota käytetään useissa todistuksissa.

Lemma 2.18 (Cauchy-Schwarz)**.** *Jos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on sisätulo vektoriavaruudessa V, niin silloin jokaiselle $x, y \in V$ pätee*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Todistus. Jos $\langle y, y \rangle = 0$, niin sisätulon ominaisuuksien nojalla $y = 0$ ja väite pätee, sillä $|\langle x, 0 \rangle|^2 = \left|\overline{\langle 0, x \rangle}\right|^2 = \left|\overline{\langle 0y, x \rangle}\right|^2 = \left|0\overline{\langle y, x \rangle}\right|^2 = 0 \leq \langle x, x \rangle 0 = 0$. Oletetaan siis, että $y \neq 0$, jolloin $\langle y, y \rangle \neq 0$. Olkoon lisäksi $\alpha \in \mathbb{C}$. Käyttämällä sisätulon ominaisuuksia saadaan

$$0 \leq \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - \alpha \langle y, x \rangle - \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \overline{\alpha} \langle y, y \rangle .$$

Valitsemalla $\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ saadaan

$$\begin{aligned}
&0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle - \frac{\overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle^2} \\
&0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \\
&|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle .
\end{aligned}$$

$\square$

Yleiselle jonoavaruudelle ℓ^p ei voida määrittää sisätuloa. Kuitenkin avaruus ℓ^2 on poikkeus tästä, kuten seuraavassa nähdään.

Lause 2.19. *ℓ^2 on sisätuloavaruus, mikäli määritellään sisätulo seuraavasti:*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \ \forall x, y \in \ell^2$$

Todistus. Todistetaan ensimmäiseksi ominaisuus 1. Käyttämällä kompleksilukujen ja tulon ominaisuuksia saadaan

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{y_i} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{y_i \overline{x_i}} = \overline{\sum_{i=1}^{\infty} y_i \overline{x_i}} = \overline{\langle y, x\rangle}$$

Olkoon seuraavaksi $x_1, x_2, y \in \ell^2$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Käyttämällä tulon ominaisuuksia saadaan

$$\begin{aligned}\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha x_{1i} + \beta x_{2i}) \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha x_{1i} \overline{y_i} + \beta x_{2i} \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha x_{1i} \overline{y_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \beta x_{2i} \overline{y_i} \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} x_{1i} \overline{y_i} + \beta \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i} \overline{y_i} = \alpha \langle x_1, y\rangle + \beta \langle x_2, y\rangle .\end{aligned}$$

Todistetaan vielä sisätulon kolmas ominaisuus. Selvästi

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \geq 0$$

itseisarvon ja kompleksilukujen laskusääntöjen nojalla. Nyt jos $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = 0$ niin $|x_i|^2 = 0 \ \forall i$ ja itseisarvon ominaisuuksien nojalla $x_i = 0 \ \forall i$ ja $x = (0, 0, \ldots) = 0$. Nyt jos x = 0, niin $x_i = 0 \ \forall i$ ja $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = 0 + 0 + \ldots = 0$. Siis $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ toteuttaa määritelmän 2.17 ominaisuudet 1-3 ja on siis sisätulo. Jonoavaruus ℓ^2 on siis sisätuloavaruus. □

2.3 Normiavaruus

Vektoriavaruuden normi kertoo vektorin etäisyyden origosta tai kahden vektorin välisen etäisyyden. Tämä pätee myös jonoavaruuksissa. Normin avulla voidaan määritellä myös jonojen ja sarjojen suppeneminen. Annetaan seuraavassa normin aksioomat.

Määritelmä 2.20. *Olkoon V vektoriavaruus ja lisäksi $\alpha \in \mathbb{C}$. Vektoriavaruuden normi $\|\cdot\|$ on kuvaus $\|\cdot\| : V \mapsto [0, \infty)$ siten että $\forall x, y \in V$ pätee*

1. $\|x\| \geq 0$ *ja* $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(kolmioepäyhtälö)*

Mikäli normin määritelmät ehdot 2 ja 3 toteutuvat ja ehto $\|x\| \geq 0$ pätee (mutta $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ei päde), niin normia $\|\cdot\|$ kutsutaan *seminormiksi*. Vektoriavaruutta normilla varustettuna kutsutaan normiavaruudeksi. Toinen normi on niin sanottu *p-normi*, joka määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 2.21. *Olkoon X lineaarinen avaruus ja $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$. X on p-normiavaruus ($p > 0$), jos*

1. $\|x\| \geq 0$ *ja* $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|^p \, \|x\| \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \, (kolmioepäyhtälö)$.

Yllä määritelty avaruus toteuttaa lähes normin ominaisuudet (tapauksesta $p = 1$ saadaan määritelmän 2.20 normi).

Sisätulo ja normi liittyvät yhteen siten että sisätulo indusoi normin. Päinvastainen tulos ei yleensä ole voimassa.

Lemma 2.22. *Jos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on sisätulo vektoriavaruudessa V, niin*

$$\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$$

on normi avaruudessa V.

Todistus. Olkoon $x, y \in V$ ja lisäksi $\alpha \in \mathbb{C}$. Todistetaan normin ominaisuudet sisätulolle. Sisätulon ominaisuuksien nojalla $\langle x, x \rangle \geq 0 \iff \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$. Lisäksi jos $\langle x, x \rangle = 0$ eli $\sqrt{\langle x, x \rangle} = 0$ niin $x = 0$ sisätulon ominaisuuksien nojalla. Jos taas $x = 0$, niin sisätulon ominaisuuksien nojalla $\langle x, x \rangle = 0 \iff \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0$.

Todistetaan seuraavaksi normin ominaisuus 2. Sisätulon ominaisuuksien ja kompleksilukujen laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|^2 &= \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha \langle x, \alpha x \rangle = \alpha \overline{\langle \alpha x, x \rangle} = \alpha \overline{\alpha} \overline{\langle x, x \rangle} \\ &= |\alpha|^2 \langle x, x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2 . \end{aligned}$$

Ottamalla neliöjuuri puolittain, saadaan $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

Kolmioepäyhtälön todistamiseksi käytetään lemmaa 2.18 ja sisätulon ominaisuuksia. Ennen kolmioepäyhtälön todistamista huomataan, että Cauchy-Schwarzin epäyhtälö (lemma 2.18) saadaan muotoon

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 .$$

Tämä on suora seuraus yllä määritellystä normista. Kolmioepäyhtälö todistetaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle = \overline{\langle x + y, x \rangle} + \overline{\langle x + y, y \rangle} \\ &= \langle x, x \rangle + \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Ottamalla neliöjuuri puolittain saadaan väite. Sisätulon kautta määritelty normi siis toteuttaa normin ominaisuudet 1-3 ja on siten vektoriavaruuden normi. Näin määriteltyä normia kutsutaan *sisätulon indusoimaksi normiksi.* □

Määritelmä 2.23. *Sisätuloavaruutta V sanotaan Hilbert-avaruudeksi, mikäli V on täydellinen sisätulon indusoiman normin suhteen.*

Lause 2.24. *Normi $\|\cdot\|$ määrittelee metriikan, jos valitaan*

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Todistus. Todistetaan metriikan ominaisuudet normille. Olkoon V normiavaruus ja $x,y,z \in V$. Normin ominaisuuksien nojalla metriikan ominaisuus 1 on selvä: $\|x-y\| \geq 0$. Jos $d(x,y) = \|x-y\| = 0$, niin normin ominaisuuden 1 nojalla $x-y=0$ ja siten $x=y$. Käyttämällä normin ominaisuutta 2 saadaan $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\| = d(y,x)$. Osoitetaan vielä metriikan ominaisuus 4. Nyt $\|x-y\| = \|x-y+z-z\| = \|x-z+(-y+z)\|$. Käyttämällä kolmioepäyhtälöä normille saadaan $\|x-z+(-y+z)\| \leq \|x-z\| + \|-y+z\| = \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z)+d(z,y)$. Siis normi toteuttaa metriikan ominaisuudet 1-4 ja on siten metriikka. Tällaista metriikkaa kutsutaan *normin indusoimaksi metriikaksi.* □

Määritelmä 2.25. *Lineaarista normiavaruutta, joka on täydellinen normin indusoiman metriikan suhteen, kutsutaan Banach-avaruudeksi.*

Seuraavaksi tarkastellaan jonoavaruuden normia. Todistuksissa tarvitaan seuraavaa lemmaa, joka on nimeltään Hölderin epäyhtälö.

Lemma 2.26 (Hölderin epäyhtälö)**.** *Olkoon $p,q \in \mathbb{R}_+$ siten, että $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Olkoon lisäksi $x \in \ell^p$ ja $y \in \ell^q$. Tällöin*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Todistus. Olkoon $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |y_i|^q = 1$. Youngin epäyhtälön (todistus: [14, s.15]) nojalla huomataan, että

$$|x_i y_i| \leq \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q.$$

Tällöin saadaan

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Määritellään kaksi jonoa seuraavasti:

$$a_i = \frac{x_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}}$$
$$b_i = \frac{y_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{1/q}}.$$

Huomataan, että $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |b_i| = 1$. Käyttämällä yllä saatua tulosta saadaan

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i y_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{1/q}} \leq 1.$$

Kertomalla molemmat puolet $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{1/q}$:lla saadaan väite. $\square$

Todistetaan seuraavassa Hölderin epäyhtälön laajennus, joka on jätetty tässä luvussa käytetyistä lähdeteoksista pois. Lauseen todistus hyödyntää alkuperäistä Hölderin epäyhtälöä.

Seuraus 2.27. *Olkoon $p, q, r \in [1, \infty)$ siten että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ ja $x \in \ell^p$ ja $y \in \ell^q$. Tällöin*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{1/q}$$

Todistus. Olkoon $p, q, r \in [1, \infty)$ siten että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Muokkaamalla lauseketta saadaan

$$\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$$
$$\frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}} = 1$$

Käyttämällä Hölderin epäyhtälöä saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|^r &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^r |y_k|^r\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k|^r)^{p/r}\right)^{r/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|y_k|^r)^{q/r}\right)^{r/q} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{r/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{r/q}.\end{aligned}$$

Ottamalla r:s juuri puolittain, saadaan

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

□

Kun tässä diplomityössä käsitellään avaruutta ℓ^p normiavaruutena, sillä tarkoitetaan avaruutta $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$. Tätä normia tullaan käyttämään seuraavissa kappaleissa useaan kertaan. Määritellään tämän jonoavaruuden normi seuraavaksi. Kuitenkaan ei voida sanoa, ettei avaruus ℓ^p sisältäisi muita normeja, kuin mitä tässä diplomityössä määritellään.

Lause 2.28. *Jonoavaruuden ℓ^p eräs normi on*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Todistus. Olkoon $x, y \in \ell^p$ ja lisäksi $\alpha \in \mathbb{C}$. Todistetaan normin ominaisuudet ℓ^p normille. Koska $|x_i| \geq 0 \ \forall i$, niin selvästi

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \geq 0.$$

Mikäli $\|x\|_p = 0 \iff \|x\|_p^p = 0$, niin $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p = 0$. Käyttämällä itseisarvon ominaisuuksia, tulee olla $|x_i| = 0\ \forall i$ ja siten $x_i = 0\ \forall i$ ja $x = (0, 0, \ldots) = 0$. Jos taas $x = (0, 0, \ldots) = 0$, niin $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p = 0 \iff \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} = 0$. Siis $\|x\|_p = 0$.

Ominaisuus 2 todistetaan suoralla laskulla. Saadaan

$$\|\alpha x\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha x_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha|^p |x_i|^p = |\alpha|^p \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p = |\alpha|^p \|x\|_p^p .$$

Ottamalla p:s juuri puolittain, saadaan $\|\alpha x\|_p = |\alpha| \|x\|_p$.

Kolmioepäyhtälön todistamiseksi tarkastellaan tilannetta osissa. Kun $p = 1$, niin käyttämällä kolmioepäyhtälöä skalaareille saadaan

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1 \ \ \forall x, y \in \ell^1.$$

Olkoon seuraavaksi $1 < p < \infty$. Tällöin saadaan käyttämällä kolmioepäyhtälöä skalaareille:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} . \end{aligned}$$

Käyttämällä Hölderin epäyhtälöä (lemmaa 2.26) saadaan molempia summia arvioitua ylöspäin seuraavasti:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^{p}\right)^{1/q},$$

koska $(p-1)q = p$. Samoin myös

$$\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^{p}\right)^{1/q}.$$

Täten saadaan

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^{p}\right)^{1/q}$$
$$= \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^{p}\right)^{1/q}.$$

Jos $x+y \neq 0$, niin jakamalla puolittain $\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{1/q}$:lla saadaan

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Tämä pätee, sillä $1-\frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. Jos $x+y=0$, niin kolmioepäyhtälö pätee triviaalisti.

Väitteessä mainittu lauseke toteuttaa siis normin määritelmän kohdat 1-3 ja on siis normi ja ℓ^p siten normiavaruus. $\square$

Seuraavaa lemmaa tullaan käyttämään varsinkin viimeisessä luvussa tässä diplomityössä, kun tutkitaan ääretönulotteisen matriisin spektriä ja resolventtijoukkoa. Lemmaa ei esitetä tai todisteta tässä luvussa käytetyissä lähteissä.

Lemma 2.29. *Äärellisten jonojen avaruus $C_0(\mathbb{N})$ on tiheä avaruudessa ℓ^p.*

Todistus. Olkoon $x \in \ell^p$ ja $\epsilon > 0$ mielivaltaisia. Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ suppenee, on olemassa $N_\epsilon > 1$ siten että

$$\sum_{k=N_\epsilon}^{\infty} |x_k|^p < \epsilon^p.$$

Olkoon $y \in C_0(\mathbb{N})$ seuraavasti:

$$y_k = \begin{cases} x_n & jos\ 1 \leq n < N_\epsilon \\ 0 & jos\ n \geq N_\epsilon. \end{cases}$$

Tällöin

$$\|x - y\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p = \sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} |x_k|^p < \epsilon^p.$$

Eli $\|x - y\|_p < \epsilon$. Koska ϵ oli mielivaltainen, niin $C_0(\mathbb{N})$ on tiheä avaruudessa ℓ^p. □

Kun tässä diplomityössä käsitellään avaruutta ℓ^∞ normiavaruutena, sillä tarkoitetaan avaruutta $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Tätä normia tullaan käyttämään useasti seuraavissa kappaleissa ℓ^p:n normin tapaan. Määritellään tämän avaruuden normi seuraavaksi.

Lause 2.30. *Jonoavaruuden ℓ^∞ eräs normi on*

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|.$$

Todistus. Olkoon $x, y \in \ell^\infty$. Olkoon lisäksi $\alpha \in \mathbb{C}$. Todistetaan normin ominaisuudet ℓ^∞ normille. Käyttämällä itseisarvon laskusääntöjä huomataan, että $|x_i| \geq 0\ \forall i$. Siten $\sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \geq 0$. Jos nyt $\|x\|_\infty = 0$, niin $\sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| = 0$. Itseisarvon laskusääntöjen nojalla täytyy olla siis $x_i = 0\ \forall i$ ja siten $x = 0$. Jos taas $x = 0$, niin $|x_i| = 0\ \forall i$ ja $\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| = 0$.

Normin ominaisuus 2 todistetaan suoralla laskulla. Selvästi

$$\|\alpha x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\alpha x_i| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\alpha|\,|x_i| = |\alpha| \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| = |\alpha|\,\|x\|_\infty\,.$$

Kolmioepäyhtälön todistamisessa käytetään kolmioepäyhtälöä skalaareille:

$$\|x+y\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i + y_i| \le \sup_{i\in\mathbb{N}} (|x_i| + |y_i|) \le \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| + \sup_{i\in\mathbb{N}} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty\,.$$

Väitteessä mainittu lauseke toteuttaa siis normin määritelmän kohdat 1-3 ja on siis normi ja ℓ^∞ siten normiavaruus. □

2.4 Jonot ja sarjat sisätulo-ja normiavaruuksissa

Tässä kappaleessa tarkastellaan, miten jonot ja sarjat käyttäytyvät sisätulo– ja normiavaruuksissa. Lisäksi tarkastellaan jonojen ja sarjojen suppenemiskriteereitä näissä avaruuksissa.

Määritelmä 2.31. *Jono $x_n \in H$, missä H on Hilbert-avaruus, suppenee heikosti kohti $x \in H$ jos*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall y \in H.$$

Seuraus 2.32. *Heikon suppenemisen raja-arvo on yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoon jonolla (x_n) kaksi heikon suppenemisen raja-arvoa x_1 ja x_2. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle \quad \forall y \in H,$$

joten $\langle x_1, y\rangle - \langle x_2, y\rangle = 0$. Käyttämällä sisätulon ominaisuuksia saadaan $\langle x_1 - x_2, y\rangle = 0$. Koska tämä pitää paikkansa jokaiselle y niin täytyy olla, että $x_1 - x_2 = 0$ ja siten $x_1 = x_2$. Siis heikon suppenemisen raja-arvo on yksikäsitteinen. □

Määritelmä 2.33. *Olkoon X lineaarinen normiavaruus. Sarja $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, missä $x_i \in X$ suppenee kohti $s \in X$ jos osasummien*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

jono (s_n) suppenee kohti s:ää, eli $\|s_n - s\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Tällöin kirjoitetaan $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = s$. Sarjaa $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ sanotaan itseisesti suppenevaksi normin $\|\cdot\|$ suhteen, jos $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty$.

Suppenevan sarjan avulla voidaan antaa sarja-karakterisointi Banach-avaruudelle, kuten seuraavassa nähdään. Lause ja sen todistus on kirjasta [17].

Lause 2.34. *Lineaarinen normiavaruus X on täydellinen jos ja vain jos sen jokainen itseisesti suppeneva sarja on suppeneva.*

Todistus. Olkoon X täydellinen ja sarja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ itseisesti suppeneva. Silloin jokaiselle $n > m$, $\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \ldots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \ldots + \|x_n\| \to 0$ kun $m \to \infty$. Tällöin (s_n) on Cauchy-jono ja siten suppeneva, siis $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ on suppeneva.

Olkoon seuraavaksi jokainen itseisesti suppeneva sarja avaruudessa X suppeneva. Olkoon (x_n) Cauchy-jono avaruudessa X. Silloin voidaan löytää indeksien jono $n_1 < n_2 < \ldots$ siten että $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < 2^{-k}$ kun $k = 1, 2, \ldots$ Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < \infty.$$

Oletuksen nojalla $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ suppenee. Tällöin siis Cauchy-jonolla (x_n) on suppeneva osajono (x_{n_k}) ja koko jono (x_n) suppenee seurauksen 2.13 nojalla. Siten X on täydellinen. $\square$

3. ÄÄRETÖNULOTTEISET MATRIISIT

Äärettönulotteisella matriisilla tarkoitetaan matriisia, jolla on äärettömän monta pysty-ja vaakariviä. Toisin sanoen ääretönulotteinen matriisi on $A = (a_{i,j})$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$, jossa $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ $\forall i, j$. Ääretönulotteisella matriisilla on monia sovelluskohteita, joita tarkastellaan tässä ja tulevissa kappaleissa. Tämä luku seuraa kirjan [2] lukua 1, mutta pyrkii selventämään ja laajentamaan muutamia kohtia, joista huomautetaan myöhemmin. Muita ääretönulotteisten matriisien sovelluskohteita on esitetty lähteessä [16]. Lisäksi tähän kappaleeseen on lisätty esimerkkejä selventämään muutamia kohtia. Ääretönulotteisen matriisin käsittely eroaa äärellisulotteisesta matriisista huomattavasti. Ääretönulotteisen matriisien peruslaskutoimitukset eivät kuitenkaan poikkea äärellisulotteisesta tapauksesta, muuten kuin kertolaskun osalta, sillä kertolaskun tulos ei aina ole olemassa. Seuraavassa määritellään ääretönulotteisten matriisien peruslaskutoimitukset.

Määritelmä 3.1. *Olkoon A ja B ääretönulotteisia matriiseja ja $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{C}$ $\forall i, j$. Olkoon lisäksi $\lambda \in \mathbb{C}$. Tällöin niiden summa ja tulo on määritelty seuraavasti:*

1. $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$
2. $\lambda A = (\lambda a_{i,j})$
3. $AB = C = (c_{i,j}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} b_{k,j}$ *(formaali tulo).*

Ääretönulotteisen matriisin konjugaattitranspoosi määritellään vastaavaan tapaan, kuin äärellisulotteisessa tapauksessa. Tällöin A:n konjugaattitranspoosia merkitään A^*. A:n sanotaan olevan *hermiittinen*, jos $A^* = A$.

On huomattava, että tulo AB on määritelty vain, kun $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} b_{k,j}$ on olemassa kaikilla i, j. Vaikka peruslaskutoimitukset ovatkin ääretönulotteisilla matriiseilla samat, kuin äärellisulotteisilla, niiden käytössä on monia poikkeuksia verrattuna äärellisulotteisiin matriiseihin. Niihin syitä on:

1. Äärellisulotteisessa tapauksessa matriisille voidaan laskea determinantti, mutta ääretönulotteiselle matriisille tämä ei onnistu.

2. Olemassaolo-ongelmat ovat yleisiä ääretönulotteisilla matriiseilla, esimerkiksi kaksi ääretönulotteista matriisia A ja B voivat olla olemassa, mutta niiden tulo AB ei välttämättä ole olemassa, sillä sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}b_{k,j}$ voi hajaantua joillain tai kaikilla i ja j:n arvoilla.

3. Matriisilaskennan teoria tarkastelee pääosin vain äärellisulotteisia matriiseja, joiden dimensio on $n \times n$. Voisi luulla, että antamalla $n \to \infty$ saavutettaisiin vastaavat tulokset ääretönulotteisille matriiseille. Tällöin kuitenkin voidaan kohdata ongelmia esimerkiksi suppenemisen suhteen.

4. Ääretönulotteisilla matriiseilla ratkotaan yleensä erilaisia ongelmia, kuin äärellisulotteisilla matriiseilla.

Määritellään seuraavaksi tässä diplomityössä käytettyjä ääretönulotteisia matriiseja. Tärkeimpiä matriiseja ovat *identiteettimatriisi*, *diagonaalimatriisi*, sekä *alakolmiomatriisi* ja *yläkolmiomatriisi*. Määritellään nämä seuraavaksi.

Määritelmä 3.2. *Ääretönulotteista matriisia I kutsutaan identiteettimatriisiksi, jos*

$$(I)_{i,j} = \begin{cases} 1 & jos\ i = j \\ 0 & jos\ i \neq j. \end{cases}$$

Tämä voidaan esittää lyhyemmin $(I)_{i,j} = \delta_{i,j}$, missä $\delta_{i,j}$ on Kroneckerin delta.

Määritelmä 3.3. *Ääretönulotteinen matriisi A on diagonaalimatriisi, mikäli $a_{i,j} = 0$ kun $i \neq j$. Tällöin matriisi näyttää seuraavalta:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Määritelmä 3.4. *Ääretönulotteinen matriisi A on alakolmiomatriisi, mikäli $a_{i,j} = 0$ kun $i < j$. Tällöin matriisi näyttää seuraavalta:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ääretönulotteinen matriisi A on yläkolmiomatriisi, mikäli $a_{i,j} = 0$ kun $j < i$. Tällöin matriisi näyttää seuraavalta:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

3.1 Ääretönulotteisen matriisin inverssi

Ääretönulotteisten matriisien kertolasku johdattelee kysymään, mitä ehtoja vaaditaan, että ääretönulotteisella matriisilla A on inverssi? Äärellisulotteisissa tapauksissa neliömatriisilla B on inverssi, jos $\det B \neq 0$. Ääretönulotteisessa tapauksessa ei determinanttia pystytä yleensä määrittämään, joten inverssin laskeminen on haastavampaa. Inverssin laskeminen yleisessä tapauksessa vaatii äärettömän monen yhtälön ratkaisemista, jossa on ääretön määrä tuntemattomia. On kuitenkin mahdollista sanoa, milloin inverssiä ei esimerkiksi ole olemassa tai millainen se on.

Annetaan seuraavaksi määritelmä ääretönulotteisen matriisin inverssille. Huomataan, että se on samanlainen kuin äärellisulotteisessa tapauksessa.

Määritelmä 3.5. *Ääretönulotteisella matriisilla A on inverssi, mikäli on olemassa ääretönulotteinen matriisi B siten että*

$$AB = BA = I.$$

Tällöin merkitään $B = A^{-1}$. Mikäli B toteuttaa vain $AB = I$, niin B on A:n oikeanpuoleinen inverssi*. Vastaavasti, jos B toteuttaa vain $BA = I$, niin niin B on A:n* vasemmanpuoleinen inverssi*.*

Annetaan seuraavaksi määritelmät injektiiviselle ja surjektiiviselle ääretönulotteiselle matriisille. Lähdeteos [2] jättää nämä mainitsematta.

Määritelmä 3.6. *Ääretönulotteinen matriisi A on injektiivinen, jos nollajono $x = (x_k) = 0\ \forall k$ on ainoa jono, jolle*

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots \\ \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0.$$

Määritelmä 3.7. *Ääretönulotteinen matriisi A on surjektiivinen, jos jokaiselle $y = (y_k)$ on olemassa $x = (x_k)$, jolle*

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots \\ \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = y.$$

Tarkastellaan seuraavaksi ehtoja, milloin ääretönulotteisella matriisilla on inverssi tai ei ole. Suurin osa lauseista on kirjasta [2], mutta todistuksia on pyritty selventämään ja laajentamaan, lisäksi esimerkit on luotu itse.

Lause 3.8. *Jos ääretönulotteisella matriisilla A on nollarivi, niin A:lla ei ole oikeanpuoleista inverssiä. Toisin, jos A:lla on nollasarake, niin A:lla ei ole vasemmanpuoleista inverssiä.*

Todistus. Olkoon A ääretönulotteinen matriisi ja $a_{n,k} = 0$ jollain vakiolla n ja jokaisella $k \geq 1$. Silloin

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} b_{k,j} = \delta_{i,j}$$

redusoituu ristiriitaan $0 = 1$ kun $j = n$, joten A^{-1} ei ole olemassa. Tarkastelu on samanlainen nollasarakkeen kanssa. $\square$

Kuitenkaan nollarivi ei estä vasemmanpuoleisen inverssin olemassaoloa, kuten seuraavassa esimerkissä nähdään.

Esimerkki 3.9. *Siirtomatriisi oikealle, jota merkitään S_-:lla, on matriisi, joka muuntaa jonon $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ jonoksi $\tilde{x} = (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \dots)$. Matriisi S_- on seuraavanlainen:*

$$S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Matriisilla S_- on nollarivi, mutta sillä on kuitenkin vasemmanpuoleinen inverssi, joka on myös siirtomatriisi. Tämä siirtomatriisi muuntaa jonon $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ jonoksi $\tilde{x} = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots)$ ja sitä kutsutaan siirtomatriisiksi vasemmalle. Merkitään tätä matriisia S_+. Matriisi on seuraavanlainen

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

S_+ on S_-:n vasemmanpuoleinen inverssi, sillä ajattelemalla S_-:n sarakkeet jonoina, S_+ siirtää S_-:n sarakkeiden alkiot yhtä ylemmäs. Tällöin siis

$$S_+S_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = I.$$

On huomattava, että edellisen yhtälön nojalla S_- on S_+:n oikeanpuoleinen inverssi. Oikeanpuoleista inverssiä S_-:lla ei ole, kuten käy ilmi lauseesta 3.8.

Lause 3.10. *Mikäli jonkin äärettömulotteisen matriisin A rivi on jokin toinen rivi kerrottuna vakiolla c, niin A:lla ei ole oikeanpuoleista inverssiä. Samoin myös sarakkeiden tapauksessa, jolloin A:lla ei vasemmanpuoleista inverssiä.*

Todistus. Olkoon A kääntyvä äärettömulotteinen matriisi, ja mikäli $a_{i_1,k} = ca_{i_2,k}$ saadaan $\delta_{i_1,j} = c\delta_{i_2,j}$, joka johtaa ristiriitaan $1 = 0$, kun $j = i_1$, joten oikeanpuoleista inverssiä ei ole olemassa. Tarkastelu on vastaava myös sarakkeiden tapauksessa. $\square$

On kuitenkin mahdollista löytää joissain tapauksissa ääretönulotteiselle matriisille inverssi tai saada ainakin jotain tietoa niistä. Tutkitaan aluksi ääretöntä alakolmiomatriisia.

Lause 3.11. *Ääretönulotteisella alakolmiomatriisilla A ei ole oikeanpuoleista inverssiä, jos $a_{i,i} = 0$ yhdellä tai useammalla i:n arvolla. Jos $a_{i,i} \neq 0$ pätee jokaisella i, niin A:lla on yksikäsitteinen oikeanpuoleinen inverssi, joka myös on alakolmiomatriisi ja jonka diagonaalialkiot ovat muotoa $\frac{1}{a_{i,i}}$.*

Todistus. Koska A on alakolmiomatriisi, niin lauseke $AB = I$ saadaan muotoon

$$\sum_{k=1}^{i} = a_{i,k} b_{k,j} = \delta_{i,j}.$$

Kun $i, j = 1$ niin saadaan

$$a_{1,1} b_{1,1} = 1 \tag{3.1}$$

ja

$$a_{1,1} b_{1,j} = 0, \tag{3.2}$$

jos $j > 1$. Jos $a_{1,1} = 0$ niin yhtälöllä (3.1) ei ole ratkaisua, ja matriisia B ei ole olemassa. Jos $a_{1,1} \neq 0$ niin $b_{1,1} = \frac{1}{a_{1,1}}$. Jos $i = 2$ niin

$$a_{2,1} b_{1,1} + a_{2,2} b_{2,1} = 0, \ a_{2,2} b_{2,2} = 1, \ a_{2,2} b_{2,j} = 0 \ \forall j > 2. \tag{3.3}$$

Jos $a_{2,2} = 0$ niin B:tä ei ole jälleen olemassa. Jos $a_{2,2} \neq 0$, niin $b_{2,2} = \frac{1}{a_{2,2}}$. Koska $b_{1,1} = \frac{1}{a_{1,1}}$ niin yhtälöstä $a_{2,1} b_{1,1} + a_{2,2} b_{2,1} = 0$ saadaan laskettua $b_{2,1}$ ja kun $a_{2,2} \neq 0$, niin $b_{2,j} = 0 \ \forall j > 2$. Jatkamalla tähän tapaan saadaan matriisi B muodostettua rivi riviltä ja B on muodostamistapansa perusteella yksikäsitteinen.

Todistuksessa oleva päättely onnistuu myös yläkolmiomatriisille. Tällöin lauseke $AB = I$ on muodossa

$$\sum_{k=1}^{j} a_{i,k} b_{k,j} = \delta_{i,j}.$$

. □

3.1.1 Ääretönulotteisen matriisin raja

Tämä kappale seuraa kirjan [2] lukua 2, joka käsittelee ääretönulotteisen matriisin rajaa. Jälleen lauseet ja todistukset ovat suurelta osin lähteestä, mutta todistuksia on pyritty laajentamaan ja selventämään. Matriisin raja voidaan ymmärtää matriisin kokona, ja sen avulla voidaan esimerkiksi vertailla eri matriiseja keskenään. Lisäksi sen avulla voidaan laskea joidenkin ääretönulotteisten matriisien inverssi. Annetaan seuraavassa matriisin rajan aksioomat.

Määritelmä 3.12. *Olkoon $\mathscr{F}$ joukko joka on suljettu ääretönulotteisten matriisien summan ja tulon suhteen, eli mikäli $A, B \in \mathscr{F}$, niin myös $A + B \in \mathscr{F}$ ja $AB \in \mathscr{F}$. Lisäksi jos $A \in \mathscr{F}$, niin $a_{i,j} \neq \infty$. Tällaisen matriisin raja on kuvaus $|\cdot|_b : \mathscr{F} \mapsto \mathbb{R}_+$ joka toteuttaa seuraavat aksioomat:*

1. $|I|_b = 1$
2. $|cA|_b = |c|\,|A|_b\,,\ \forall c \in \mathbb{C}$
3. $|A + B|_b \leq |A|_b + |B|_b \ \forall\ A, B \in \mathscr{F}$
4. $|AB|_b \leq |A|_b\,|B|_b$
5. $|a_{i,j}| \leq |A|_b \ \forall i, j.$

Esimerkkejä matriisin rajoista ovat matriisin K_r ja K_c - rajat. Olkoon A ääretönulotteinen matriisi. Kirjoitetaan

$$M_i = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|\,,\ \ N_j = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{i,j}|\,,$$

kun molemmat ovat äärellisinä olemassa. Ylärajaa M_i, kun se on äärellinen, kutsutaan A:n K_r*-rajaksi.* Ylärajaa N_j, kun se on äärellinen, kutsutaan A:n K_c*-rajaksi.* Todistetaan seuraavaksi annetut rajat matriisin A rajoiksi, joka lähdeteoksessa [2] jätetään lukijalle.

Lause 3.13. *Ääretönulotteisen matriisin A K_r ja K_c -rajat ovat A:n rajoja.*

Todistus. Todistetaan rajan ominaisuudet K_r - rajalle. Todistus on vastaava myös K_c - rajalle. Olkoon $A, B \in \mathscr{F}$ ja $|A|_b$ ja $|B|_b$ K_r-rajat A:lle ja B:lle. Olkoon lisäksi $c \in \mathbb{C}$. Rajan ominaisuus 1 on selvä. Ominaisuus 2 todistetaan suoralla laskulla:

$$|cA|_b = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |ca_{i,j}| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |c|\,|a_{i,j}| = |c| \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}| = |c|\,|A|_b\,.$$

Ominaisuus 3 saadaan todistettua käyttämällä kolmioepäyhtälöä skalaareille, sekä pienimmän ylärajan ominaisuuksia:

$$\begin{aligned}
|A+B|_b &= \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}+b_{i,j}| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \right) \\
&= \sup_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{\infty} |b_{i,j}| \right) \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}| + \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |b_{i,j}| \\
&= |A|_b + |B|_b\,.
\end{aligned}$$

Ominaisuus 4 saadaan todistettua seuraavasti, käyttämällä jälleen kolmioepäyhtälöä skalaareille ja pienimmän ylärajan ominaisuuksia:

$$\begin{aligned}
|AB|_b &= \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \sup_{k\in\mathbb{N}} |b_{k,j}| \\
&= \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |b_{k,j}| \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| = \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |b_{k,j}| \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |b_{k,j}| \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \\
&= |B|_b\,|A|_b = |A|_b\,|B|_b\,.
\end{aligned}$$

Lisäksi on selvää, että $|a_{i,j}| \leq |A|_b$. Siis matriisin K_r -raja toteuttaa rajan aksioomat 1-5 ja on siis matriisin raja. K_c - rajalla on samanlaiset ominaisuudet kuin K_r:llä ja sekin on matriisin raja. $\square$

Olkoon (B_n) suppeneva ääretönulotteisten matriisien jono, joka suppenee alkioittain kohti matriisia B. Oletetaan lisäksi, että $B_n \in \mathscr{F}$ jokaisella n. Oletetaan myös, että $|B_n|_b < M$ jokaisella n, missä $M \in \mathbb{R}_+$. Tällöin matriisin B rajaa sanotaan *puolisuljetuksi*, jos $B \in \mathscr{F}$ ja $|B|_b \leq M$.

Mikäli ääretönulotteisella matriisilla A ei ole mitään erityistä muotoa (kuten alakolmiomatriisi), joka johtaisi yksinkertaisiin yhtälöihin inverssin määrityksessä, niin joudutaan rajoittumaan vain matriiseihin, jotka kuuluvat joukkoon $\mathscr{F}$. Jatketaan seuraavassa tällaisten matriisien inverssin määritystä. Aluksi todistetaan lemma, jota käytetään todistuksissa. Lemma ja sen todistus on esitetty lähteessä [2, s.27], mutta todistusta on jälleen selvennetty muutamilta kohdilta.

Lemma 3.14. *Olkoon $c_p \in \mathbb{C}$ jokaisella p. Olkoon lisäksi $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$, joiden rajat ovat puolisuljettuja. Jos $\sum_{p=1}^{\infty} |c_p|\,|A_p|_b$ suppenee, niin $\sum_{p=1}^{\infty} c_p A_p \in \mathscr{F}$ on olemassa ja lisäksi*

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty} c_p A_p\right|_b \leq \sum_{p=1}^{\infty} |c_p|\,|A_p|_b\,.$$

Todistus. Olkoon $B_n \equiv \sum_{p=1}^{n} c_p A_p$, silloin $B_n \in \mathscr{F}$ määritelmän 3.12 nojalla. Oletetaan että $\sum_{p=1}^{\infty} |c_p|\,|A_p|_b$ suppenee, jolloin käyttämällä rajan aksioomaa 4 saadaan

$$|(B_n)_{i,j}| = \left|\sum_{p=1}^{n} c_p (A_p)_{i,j}\right| \leq \sum_{p=1}^{n} |c_p|\,|(A_p)_{i,j}| \leq \sum_{p=1}^{\infty} |c_p|\,|A_p|_b = q,$$

missä $(A_p)_{i,j}$ tarkoittaa matriisin A_p alkiota $a_{i,j}$.

Siis $\sum_{p=1}^{\infty} c_p (A_p)_{i,j}$ on itseisesti suppeneva jokaisella i, j. Tällöin siis myös $B_n \to B$, kun $n \to \infty$ jokaisella i, j. Lisäksi koska

$$|B_n|_b \leq \sum_{p=1}^{n} |c_p|\,|A_p|_b < q,$$

niin A_p:n rajojen ollessa puolisuljettuja, niin myös $B \in \mathscr{F}$ ja $|B|_b \leq q$. $\square$

Lemma 3.15. *Olkoon $A, B \in \mathscr{F}$ ja A:n ja B:n rajat puolisuljettuja. Muodostetaan kaksi uutta matriisia $C = \sum_{p=1}^{\infty} c_p A^p$ ja $G = \sum_{q=1}^{\infty} g_q B^q$. Jos $\sum_{p=1}^{\infty} |c_p|\,|A|_b^p$ sekä*

$\sum_{q=1}^{\infty} |g_q| \, |B|_b^q$ *suppenevat, niin tulon* CG *termit voidaan järjestää mihin tahansa järjestykseen tulon arvon muuttumatta.*

Todistus. Olkoon $A, B \in \mathscr{F}$. Selvästi myös $C, G \in \mathscr{F}$ $\mathscr{F}$:n ominaisuuksien nojalla. Oletetaan, että $\sum_{p=1}^{\infty} |c_p| \, |A|_b^p$ sekä $\sum_{p=1}^{\infty} |g_p| \, |B|_b^p$ suppenevat. Olkoon tällöin $\sum_{p=1}^{\infty} |c_p| \, |A|_b^p = c$ ja $\sum_{p=1}^{\infty} |g_p| \, |B|_b^p = g$. Tällöin $|C|_b \leq c$ ja $|G|_b \leq g$, koska $|A^p|_b \leq |A|_b^p$ rajan aksiooman 4 nojalla. Käyttämällä rajan ominaisuuksia saadaan

$$|(CG)_{i,j}| \leq |CG|_b \leq |C|_b \, |G|_b \leq cg < \infty.$$

Siis tulo $\sum_{p=1}^{\infty} c_p A^p \sum_{q=1}^{\infty} g_q B^q$ on itseisesti suppeneva, jolloin sen termit voidaan järjestää mihin tahansa järjestykseen. □

Seuraava lause ja sen todistus on lähdeteoksen [2] sivulta 30, mutta jättää pois muutamia tärkeitä kohtia, jotka on lisätty todistukseen. Seuraava lause on lähes sama, kuin luvussa 4 esiteltävä *Neumannin sarja.*

Lause 3.16. *Olkoon* $A \in \mathscr{F}$ *ja* A*:n raja puolisuljettu. Jos* $|A|_b < 1$*, niin* $B = I + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A^p$ *on olemassa ja* $B \in \mathscr{F}$*. Lisäksi* $B = (I + A)^{-1}$*. Lisäksi pätee:*

$$\frac{1}{1 + |A|_b} \leq |B|_b \leq \frac{1}{1 - |A|_b}.$$

Todistus. Merkitään $C = I + A$ ja $G = I + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A^p$ lemmassa 3.15. Koska $I, A \in \mathscr{F}$, niin $C, G \in \mathscr{F}$. Tulo CG on itseisesti suppeneva lemman 3.15 nojalla, jolloin sen termit voidaan järjestää mihin tahansa järjestykseen tulon arvon muuttumatta. Tällöin

$$\begin{aligned}
&(I + A) \left(I + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p A^p \right) \\
&= (I + A)(I - A + A^2 - A^3 + A^4 - A^5 + \ldots) \\
&= I - A + A^2 - A^3 + A^4 - A^5 + \ldots + A - A^2 + A^3 - A^4 + A^5 - \ldots \\
&= I.
\end{aligned}$$

Toisaalta

$$
\begin{aligned}
&\left(I+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p A^p\right)(I+A)\\
&=(I-A+A^2-A^3+A^4-A^5+\ldots)(I+A)\\
&=I+A-A-A^2+A^2+A^3-A^3-A^4+A^4-A^5-\ldots\\
&=I.
\end{aligned}
$$

Siten $I+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p A^p=(I+A)^{-1}$. Lemman 3.14 nojalla, koska $|A|_b<1$ saadaan käyttämällä rajan ominaisuutta 3 ja geometrisen sarjan summaa:

$$
\begin{aligned}
(1-|A|_b)\left|I+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p A^p\right|_b &\leq (1-|A|_b)\left(1+\sum_{p=1}^{\infty}|A|_b^p\right)\\
&=(1-|A|_b)\left(1+(-1)+\sum_{p=0}^{\infty}|A|_b^p\right)=(1-|A|_b)\left(\frac{1}{1-|A_b|}\right)=1.
\end{aligned}
$$

Merkitsemällä $B=I+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p A^p$ saadaan

$$
|B|_b\leq\frac{1}{1-|A|_b}.
$$

Koska $B=(I+A)^{-1}$ niin $I=(I+A)B=B+AB$. Tällöin käyttämällä rajan ominaisuuksia 1, 3 ja 4 saadaan

$$
1=|B+AB|_b\leq|B|_b+|AB|_b\leq|B|_b+|A|_b\,|B|_b=(1+|A|_b)\,|B|_b\,.
$$

Siten $\frac{1}{1+|A|_b}\leq|B|_b$. Yhdistämällä saadut tulokset saadaan

$$
\frac{1}{1+|A|_b}\leq|B|_b\leq\frac{1}{1-|A|_b}.
$$

□

3.2 Ääretönulotteisen matriisin diagonalisointi

Tämä kappale seurailee jälleen kirjan [2] lukua 3, mutta jälleen todistuksia on pyritty laajentamaan ja selventämään. Edellisessä kappaleessa tarkasteltiin ääretönulotteisen matriisin inverssin löytämistä. Tällöin voidaan ratkaista yleisiä yhtälöitä, kuten $AX = B$, jonka ratkaisu on $X = A^{-1}B$. Kvanttimekaniikassa yksi keskeinen ongelma on löytää matriisit X ja D annetulle matriisille A siten että

$$A = XDX^{-1}, \tag{3.4}$$

missä D on diagonaalimatriisi. Matriisin A diagonalisointi tarkoittaakin yhtälön

$$AX - DX = 0 \tag{3.5}$$

ratkaisemista. Yleisessä tapauksessa yhtälö (3.5) on muodossa

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}x_{k,j} = x_{i,j}d_j,$$

joka muodostuu äärettömän monesta homogeenisesta lineaarisesta yhtälöstä, jossa on äärettömän monta tuntematonta. Tämän yhtälöryhmän ei-triviaalin ratkaisun muodostaminen ei ole ongelmatonta. Mikäli kuitenkin A on esimerkiksi alakolmiomatriisi, yhtälön (3.5) ratkaiseminen on helppoa, kuten seuraavasta käy ilmi.

Lause 3.17. *Mikäli ääretönulotteisen alakolmiomatriisin A kaikki diagonaalialkiot ovat eriävät: $a_{i,i} \neq a_{j,j}$ $\forall i, j$, niin on olemassa alakolmiomatriisi X siten että $AX - DX = 0$, missä $d_{i,i} = a_{i,i}$. Lisäksi X:n alkiot voidaan kaikki määrittää mielivaltaisella alkiolla $x_{1,1}$.*

Todistus. Alakolmiomatriisin tapauksessa yhtälö $AX - DX = 0$ redusoituu muotoon $\sum_{k=j}^{i} a_{i,k}x_{k,j} = x_{i,j}d_j$. Kun $j = i$, niin $a_{i,i}x_{i,i} = x_{i,i}d_i$ ja kaikki arvot $x_{i,i}$ toteuttavat yhtälön. Jos $x_{i,i} \neq 0$ niin $a_{i,i} = d_i$. Kun $i = 2$ saadaan

$$a_{2,1}x_{1,1} + a_{2,2}x_{2,1} = x_{2,1}d_1,$$

kun $j = 1$ ja koska $d_1 = a_{1,1} \neq a_{2,2}$ saadaan

$$x_{2,1} = \frac{a_{2,1}x_{1,1}}{a_{1,1} - a_{2,2}}.$$

Tällöin siis $x_{2,1}$ voidaan valita sopivasti. Seuraavaksi, jos $i = 3$ ja $j = 2$ saadaan

$$a_{3,2}x_{2,2} + a_{3,3}x_{3,2} = x_{3,2}d_2,$$

josta $x_{3,2} = \frac{a_{3,2}x_{2,2}}{a_{2,2} - a_{3,3}}$, missä $a_{2,2} \neq a_{3,3}$. Lisäksi jos $i = 3$ ja $j = 1$ saadaan

$$a_{3,1}x_{1,1} + a_{3,2}x_{2,1} + a_{3,3}x_{3,1} = x_{3,1}d_1,$$

josta voidaan voidaan laskea $x_{3,1}$. Jokainen X:n alkio voidaan siis määrittää yksi kerrallaan diagonaalialkion $x_{1,1}$ avulla. □

3.3 Äärettönulotteiset matriisit ja jonot ja sarjat

Tämä kappale seuraa suurimmaksi osaksi kirjan [2] lukua 4 , mutta kirjassa esitettyjä todistuksia on pyritty selventämään ja lisäksi kappaleen esimerkkejä on lisätty tähän diplomityöhön. Joitain osia tästä kappaleesta on lähteestä [3], mutta niistä on kerrottu erikseen. Kirjallisuudessa äärettönulotteisia matriiseja ja jonoja ja sarjoja on käsitelty paljon, esimerkiksi [1], [3], [6], [11], [12], [15] ja se onkin tärkeimpiä äärettönulotteisen matriisin sovelluskohteita. Olkoon $s_n(x)$ n:s osasumma sarjasta, joka suppenee, kun $|x| < 1$ ja hajaantuu, kun $|x| > 1$. Tarkastellaan uutta jonoa

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}s_k(x).$$

Toisin sanoen uusi jono saadaan kertomalla osasummien jono $s_n(x)$ matriisilla $A = (a_{n,k})$. Tällöin saatua jonoa sanotaan jonon (s_n) *A-muunnokseksi*. Mikäli sarja $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}s_k(x)$ suppenee, kun $|x| > 1$, saadaan keinotekoinen tapa laskea hajaantuvan sarjan $s_n(x)$ summa. Vaihdetaan jono $s_n(x)$ yleiseen jonoon (z_n) ja oletetaan, että

$$z'_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} z_k$$

suppenee, kun $n > n_0$. Jos $z'_n \to z$ kun $z_n \to z$ ja muunnettu jono suppenee jollain hajaantuvalla jonolla (z_n), niin jonon (z'_n) raja-arvoa sanotaan jonon (z_n) *A-raja-arvoksi.*

Tutustutaan seuraavassa ehtoihin millainen matriisi voi muuntaa jonoja tai sarjoja toiseksi alkuperäisen jonon tai sarjan suppenemisen säilyttäen. Seuraavat lauseet ovat pääosin lähteestä [2] ja [3]. Todistetaan aluksi lemma, jota käytetään lauseen todistuksessa sen jälkeen. Lemma ja todistus on kirjasta [2, s. 61].

Lemma 3.18. *Mikäli sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ hajaantuu, on olemassa jono $z_k \to 0$ siten että $|\sum_{k=1}^{n} u_k z_k| \to \infty$, kun $n \to \infty$.*

Todistus. Merkitään $u_k = |u_k| e^{i\theta_k}$ ja valitaan $r > 1$. Määrätään p_0 ehdolla $\sum_{k=1}^{p_0} |u_k| > r$. Määrätään p_1 ehdolla $\sum_{k=1}^{p_1} |u_k| > r^2$ ja niin edelleen. Asetetaan $z_k = e^{-i\theta_k}$, kun $1 \leq k \leq p_0$, $z_k = \frac{e^{-i\theta_k}}{r}$ kun $p_0 < k \leq p_1$ ja $z_k = \frac{e^{-i\theta_k}}{r^2}$ kun $p_1 < k \leq p_2$ ja niin edelleen. Tällöin

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_k z_k\right| = \sum_{k=1}^{p_0} |u_k| + \frac{1}{r} \sum_{k=p_0+1}^{p_1} |u_k| + \frac{1}{r^2} \sum_{k=p_1+1}^{p_2} |u_k| + \ldots > r + r + r + \ldots = \infty.$$

Tämä todistaa lemman. □

3.3.1 *K* ja *T*– matriisit ja niiden ominaisuudet

Tässä kappaleessa tutkitaan, millä välttämättömillä ja riittävillä ehdoilla jonon muunnos on suppeneva, kun alkuperäinen jono myös suppenee. Kappaleessa nimetään kaksi matriisityyppiä, jotka toteuttavat annetut ehdot, ja näitä kutsutaan tapauksesta riippuen joko $K-$ tai T – matriisiksi. Näiden yleisiä ominaisuuksia tutkitaan ja näytetään millaisia nämä matriisit voivat olla esimerkein. Tämä kappale seuraa kirjan [2] kappaletta 4, mutta todistuksia on pyritty selventämään ja esimerkkejä lisäämään. Merkitään seuraavassa $a_{\omega,k} \equiv a_k(\omega)$, missä ω on jatkuva positiivinen reaalinen muuttuja. Seuraava lause on esitetty ja todistettu sivulla 60 lähdeteoksessa [2].

Lause 3.19. *Välttämättömät ja riittävät ehdot, että*

$$z'(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) z_k \ (\omega > \omega_0)$$

suppenee jokaisella suppenevalla jonolla (z_k)*, ovat*

1. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\omega)| \leq M$ *kun* $\omega > \omega_0$
2. $\lim_{\omega \to \infty} a_k(\omega) = \alpha_k$ *(k on vakio)*
3. $\lim_{\omega \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) = \lim_{\omega \to \infty} A(\omega) = \alpha$.

   Jos ehdot 1-3 toteutuvat, niin
4. $\lim_{\omega \to \infty} z'(\omega) = \alpha z + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (z_k - z)$*, kun* $z_k \to z$.

Todistus. Todistetaan ensin että ehdot ovat riittävät. Ehtojen 1 ja 2 nojalla, kun $\omega \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\omega)| \to \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \leq M,$$

joten $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ on itseisesti suppeneva. Jos $z_k \to z$ voidaan kirjoittaa $z_k = z + \epsilon_k$, missä $\epsilon_k \to 0$. Tällöin jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa p siten että $|\epsilon_k| < \frac{\epsilon}{3M}$, kun $k > p$. On olemassa myös q siten että

$$\left| \sum_{k=1}^{p} (a_k(\omega) - \alpha_k) \epsilon_k \right| \leq \frac{\epsilon}{3} \ kun \ \omega > q.$$

Siten

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(\omega)-\alpha_k)\epsilon_k\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^{p}(a_k(\omega)-\alpha_k)\epsilon_k\right| + \sum_{k=p+1}^{\infty}\left(|a_k(\omega)|+|\alpha_k|\right)|\epsilon_k| \\ &< \frac{\epsilon}{3}+\frac{2M\epsilon}{3M}=\epsilon,\end{aligned}$$

kun $\omega > q$.

Tämä todistaa, että $\lim_{\omega\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega)\epsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\epsilon_k$. Ehdon 3 nojalla

$$z'(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\omega)z_k = A(\omega)z+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\omega)\epsilon_k,$$

joten

$$\lim_{\omega\to\infty} z'(\omega)=\alpha z+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\epsilon_k=\alpha z+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(z_k-z).$$

Ehdot 1-3 ovat siis riittävät.

Todistetaan seuraavaksi, että ehdot ovat välttämättömät. Tarkastellaan jonoa $z_k = 0$ $(k \neq p)$, $z_p = 1$. Tällöin $z_k \to 0$ ja $z'(\omega) = a_p(\omega)$. Jotta $z'(\omega)$ suppenisi, kun $\omega \to \infty$ tarvitaan ehtoa 2.

Tarkastellaan seuraavaksi jonoa $z_k = 1$ jokaisella k. Tällöin $z_k \to 1$ ja $z'(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) = A(\omega)$. Siten $A(\omega)$ täytyy supeta, kun $\omega \to \infty$ ja ehto 3 on siis välttämätön. Täytyy vielä osoittaa ehdon 1 välttämättömyys. Lemman 3.18 nojalla täytyy $A_1(\omega) \equiv \sum_{k=1}^{\infty}|a_k(\omega)|$ olla suppeneva jokaiselle $\omega > \omega_0$, sillä muuten on olemassa jono $z_k \to 0$ siten että $|\sum_{k=1}^{n} a_k(\omega)z_k| \to \infty$, kun $n \to \infty$, mikä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että matriisia A voidaan käyttää jokaiseen suppenevaan jonoon. Oletetaan nyt, että ehto 1 ei toteudu. Silloin $\lim_{\omega\to\infty} A_1(\omega) = \infty$. Asettamalla $a_k(\omega) = b_k(\omega) + ic_k(\omega)$ missä $b_k(\omega)$ ja $c_k(\omega)$ ovat reaaliset, saadaan jono (v_n) jolle

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_k(v_n)|=\infty \ tai\ \sum_{k=1}^{\infty}|c_k(v_n)|=\infty$$

tai molemmat hajaantuvat. Kirjoitetaan $b_k(v_n) \equiv s_{n,k}$ ja oletaan että

$$\sum_{k=1}^{\infty} |s_{n,k}| \equiv S_n \to \infty.$$

Konstruoimalla reaalinen jono $x_k \to 0$, jolle $|x_k| \leq 1$ $\forall k$ siten että jonolla $x'_n = \sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k} x_k$ on osajono, joka hajaantuu, saadaan todistettua, että ehto 1 on välttämätön. Ehdon 2 nojalla, p:n ollessa vakio, summalla

$$\sum_{k=1}^{p} |s_{n,k}| \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

on maksimi C_p. Sopivasti valitsemalla $n = n_1$ ja $p = q_1$ saadaan $\sum_{k=1}^{q_1} |s_{n,k}| > r^2$, missä $r > 1$ on vakio. Koska n_1 on vakio, niin on olemassa $p_1 \geq q_1$ siten että

$$\sum_{k=p_1+1}^{\infty} |s_{n_1,k}| \leq \epsilon$$

jokaiselle $\epsilon > 0$ sarjan ollessa suppeneva. Asettamalla $x_k = \frac{1}{r}\mathrm{sgn}(s_{n,k})$, kun $1 \leq k \leq p_1$ saadaan

$$x'_{n_1} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{p_1} |s_{n_1,k}| + \sum_{k=p_1+1}^{\infty} s_{n_1,k} x_k,$$

ja siten koska $|x_k| \leq 1$ jokaiselle k saadaan

$$\left| x'_{n_1} \right| > r - \epsilon.$$

Määräämällä samaan tapaan $n_2 > n_1$ ja $q_2 > p_1$ saadaan

$$\left| x'_{n_2} \right| > r^2 - \epsilon.$$

Jatkamalla tähän tapaan saadaan jono $x_k \to 0$ siten että joillekin n arvoille $x'_n \to \infty$. Tarkastelu on vastaava, jos $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(v_n)|$ hajaantuu. Tämä osoittaa, että ehto 1 on välttämätön. Lause on siis todistettu. □

Voidaan myös vaihtaa positiivinen muuttuja ω luonnolliseksi luvuksi n, jolloin $a_k(\omega) = a_{n,k}$. Tällöin ehtojen 1,2 ja 3 toteuttavaa matriisia sanotaan K– *matriisiksi.*

Annetaan seuraavaksi välttämättömät ja riittävät ehdot sille, että suppeneva jono muuntuu matriisimuunnoksessa nollaan suppenevaksi jonoksi.

Lause 3.20. *Välttämättömät ja riittävät ehdot, että* $\lim_{\omega\to\infty} z'(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) z_k = 0$*, kun* $\lim_{k\to\infty} z_k = z$ *ovat*

1. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\omega)| \leq M$ *kun* $\omega > \omega_0$
2. $\lim_{\omega\to\infty} a_k(\omega) = 0$ *jokaiselle vakiolle* k
3. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) = A(\omega) \to 1$ *kun* $w \to \infty$.

Todistus. Asettamalla $\alpha_k = 0$ ja $\alpha = 1$ lauseessa 3.19 nähdään, että ehdot 1-3 ovat riittävät. Ehtojen 1 ja 3 välttämättömyys seuraa samoin kuin lauseessa 3.19. Jos $\alpha_k \neq 0$ jollekin k jono $z_n = 0$ $(n \neq k)$, $z_k = 1$, joka suppenee kohti 0, niin tämä redusoi ehdon 4 lauseessa 3.19 muotoon $\alpha_k \neq 0$, joten $z'(\omega)$ ei suppenisi kohti 0:aa. Siten ehto 2 tässä lauseessa on välttämätön. Lause on siis todistettu. □

Jos muuttuja ω vaihdetaan luonnolliseksi luvuksi n, niin ehdot 1-3 toteuttavaa matriisia sanotaan T-matriisiksi.

Esitellään seuraavaksi joitain T - matriiseja. Lähdeteoksessa [2] nämä seuraavat esimerkit mainitaan T-matriiseiksi, mutta tätä ei kuitenkaan osoiteta. Yksi esimerkkimatriisi on jonon aritmeettinen keskiarvomuunnos, johon käytetään aritmeettista keskiarvomatriisia.

Esimerkki 3.21. *Aritmeettinen keskiarvomatriisi A, joka on muotoa*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

eli $a_{n,k} = \frac{1}{n}$, *kun* $k \leq n$ *ja* $a_{n,k} = 0$ *muulloin, on* T– *matriisi.*

Todistus. Selvästi mielivaltaisella rivillä, kun $n > 0$: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{n}\right| = n\left|\frac{1}{n}\right| \leq M$, missä $M = 1$. Toinen ominaisuus on selvä, sillä mielivaltaisella sarakkeella

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ominaisuus 3 todistetaan seuraavasti. Selvästi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n\frac{1}{n} = 1.$$

Tällöin siis $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \equiv A_n \to 1$ kun $n \to \infty$. Aritmeettinen keskiarvomatriisi siis toteuttaa T - matriisin ominaisuudet 1-3 ja on siis T-matriisi. □

Toinen esimerkki T-matriisista on *Borel*– matriisi.

Esimerkki 3.22. *Borel– matriisi, joka on muotoa*

$$a_k(\omega) = \frac{e^{-\omega}\omega^k}{k!}$$

on T– *matriisi.*

Todistus. Ottamalla $\omega_0 = 1$ saadaan käyttämällä eksponenttifunktion potenssisarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(\omega)| = e^{-\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^k}{k!} = e^{-\omega}e^{\omega} = 1 \leq M.$$

Voidaan siis valita $M \geq 1$. Tämä todistaa T– matriisin ominaisuudet 1 ja 3. Ominaisuus 2 on selvää, sillä

$$\lim_{w\to\infty} e^{-\omega}\frac{\omega^k}{k!} = 0,$$

jokaiselle vakiolle k. Siis Borel– matriisi on T– matriisi. □

Tutkitaan seuraavaksi K ja T – matriisien yleisiä ominaisuuksia. Huomataan esimerkiksi, että kahden K– matriisin summa ja tulo on myöskin K– matriisi. Seuraava todistus on kirjasta [2, s.82], mutta esimerkiksi kahden K– matriisin summaa ei todisteta K– matriisiksi, joten se on lisätty todistukseen.

Lause 3.23. *Kahden K– matriisin summa ja tulo ovat K– matriiseja.*

Todistus. Olkoon A ja B K– matriiseja. Todistetaan ensimmäiseksi, että $A+B$ on K– matriisi. Selvästi kun $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\omega)| \leq M_a$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k(\omega)| \leq M_b$, niin saadaan kolmioepäyhtälön nojalla

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\omega) + b_k(\omega)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(\omega)| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k(\omega)| \leq M_a + M_b = M.$$

Toinen ominaisuus todistetaan suoralla laskulla. Kun molemmat matriisit ovat K– matriiseja saadaan

$$\lim_{\omega\to\infty} a_k(\omega) + b_k(\omega) = \alpha_k + \beta_k.$$

Kolmas ominaisuus todistetaan myös suoralla laskulla.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) + b_k(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\omega) = A(\omega) + B(\omega) \to \alpha + \beta,$$

kun $\omega \to \infty$. Ominaisuus 4 todistetaan sekin suoralla laskulla, sillä

$$z'(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(\omega) + b_k(\omega)\right) z_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega) z_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\omega) z_k$$

ja tästä seuraa $\lim_{\omega\to\infty} z'(\omega) = (\alpha + \beta)\, z + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k)(z_k - z)$.

Todistetaan seuraavaksi kahden K– matriisin tulo K– matriisiksi osoittamalla, että kahden K– matriisin tulo muntaa suppenevan jonon suppenevaksi jonoksi. Tällöin väite seuraa lauseesta 3.19 ja K– matriisin määritelmästä. Olkoon $z_i' = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} z_k$, joka suppenee kohti raja-arvoa z', kun $i \to \infty$. Olkoon lisäksi $z''_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,i} z'_i$, joka suppenee kohti raja-arvoa z'', kun $n \to \infty$. Oletetaan myös, että z_k on suppeneva jono. Jos M,N ovat matriisen A ja B rajoja, niin

$$|z''_n| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |b_{n,i}| \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \, |z_k| \leq NMg,$$

missä $g \geq |z_k|$. Kaksoissarjan $\sum_{i=1}^{\infty} b_{n,i} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} z_k$ termit voidaan siis järjestää mihin tahansa järjestykseen muuttamatta kaksoissarjan raja-arvoa, sillä kaksoissarja suppenee itseisesti. Siten

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_{n,i} a_{i,k} \right) z_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{n,i} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} z_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{n,i} z'_i = \lim_{n\to\infty} z''_n = z''.$$

Koska ylläoleva pätee jokaiselle suppenevalle jonolle (z_k), niin matriisi

$$C = (c_{n,k}) = \sum_{i=1}^{\infty} b_{n,i} a_{i,k}$$

muuntaa jokaisen suppenevan jonon suppenevaksi jonoksi. Siten lauseen 3.19 nojalla C on $K-$ matriisi. $\square$

T - matriisin tapauksessa kahden $T-$ matriisin tulo on T matriisi, ja sen todistus on vastaava, kuin lauseessa 3.23. Kahden $T-$ matriisin summa ei ole T matriisi, sillä summa ei toteuta ehtoa 3 lauseessa 3.20.

Rajoitettu hajaantuva jono ja suppeneva jono määrittävät T − matriisin, kuten seuraavassa nähdään. Lause ja todistus on jälleen kirjasta [2, s.80], mutta lähdeteos jättää joitain osia lukijalle todistettavaksi, jotka on lisätty tähän todistukseen.

Lause 3.24. *Jokainen rajoitettu hajaantuva jono (s_n) ja rajoitettu jono (σ_n) määrittävät $T-$ matriisin seuraavasti:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{s_{v_1}-\sigma_1}{s_{v_1}-s_{\mu_1}} & 0 & \dots & 0 & \frac{\sigma_1-s_{\mu_1}}{s_{v_1}-s_{\mu_1}} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{s_{v_2}-\sigma_2}{s_{v_2}-s_{\mu_2}} & 0 & \dots & 0 & \frac{\sigma_2-s_{\mu_2}}{s_{v_2}-s_{\mu_2}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Todistus. Jokaisen hajaantuvan rajoitetun jonon alkioilla on olemassa vähintään kaksi toisistaan poikkeavaa äärellistä arvoa, jotka olkoon z_1 ja z_2. Valitaan indeksien jono $\mu_1 < v_1 < \mu_2 < v_2 < \dots$ siten että $s_{\mu_n} \to z_1$ ja $s_{v_n} \to z_2$ ja $s_{\mu_n} \neq s_{v_n}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Tällöin muunnoksen

$$x'_n = \frac{s_{v_n} - \sigma_n}{s_{v_n} - s_{\mu_n}} x_{\mu_n} + \frac{\sigma_n - s_{\mu_n}}{s_{v_n} - s_{\mu_n}} x_{v_n}$$

matriisi on $T-$ matriisi. Melivaltaisesta sarakkeesta saadaan $a'_n = \left(0, 0, \dots, \frac{s_{v_n}-\sigma_n}{s_{v_n}-s_{\mu_n}}, 0, \dots\right)$ tai $a''_n = \left(0, 0, \dots, \frac{\sigma_n-s_{\mu_n}}{s_{v_n}-s_{\mu_n}}, 0, \dots\right)$. Molemmissa tapauksissa $\lim_{n\to\infty} a'_n = \lim_{n\to\infty} a''_n = 0$, joten $T-$ matriisin ominaisuus 2 on selvä. Ominaisuus 3 saadaan suoralla laskulla. Mielivaltaisella rivillä saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \frac{s_{v_n} - \sigma_n}{s_{v_n} - s_{\mu_n}} + \frac{\sigma_n - s_{\mu_n}}{s_{v_n} - s_{\mu_n}} = 1 \to 1.$$

Siis $T-$ matriisin ominaisuus 3 on selvä. Ominaisuus 1 todistetaan muistamalla, että jono (σ_n) on rajoitettu. Tällöin

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| = \left| \frac{s_{v_n} - \sigma_n}{s_{v_n} - s_{\mu_n}} + \frac{\sigma_n - s_{\mu_n}}{s_{v_n} - s_{\mu_n}} \right| = \left| \frac{s_{v_n} - s_{\mu_n}}{s_{v_n} - s_{\mu_n}} \right| = |1| = 1 \leq M,$$

kun valitaan $M = 1$. Siten ominaisuudet 1-3 on todistettu matriisille A ja A on siten $T-$ matriisi. Alakolmiomatriiseilla ei ole vastaavaa ominaisuutta, joka nähdään ottamalla $s_1 = 0$ ja $\sigma_1 \neq 0$. □

3.3.2 γ – ja β – matriisit ja niiden ominaisuudet

Edellisessä kappaleessa keskityttiin pääasiassa jonoihin ja niiden muunnoksiin. Siirrytään nyt tarkastelemaan äärettömien sarjojen muunnoksia ääretönulotteisilla matriiseilla. Tällaisille matriiseille annetaan riittävät ja välttämättömät ehdot ja edellisen kappaleen tapaan nämä nimetään ominaisuuksista riippuen $\gamma-$ tai $\beta-$ matriisiksi. Tarkastellaan sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ muunnosta

$$\gamma(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_k.$$

Tässäkin vaaditaan, että alkuperäisen sarjan suppeneminen ei tuhoudu muunnoksessa ja sarjan summan tulisi olla muunnoksen jälkeen muuttumaton tai muunnettu jollain tunnetulla relaatiolla. Todistetaan aluksi kaksi lemmaa, jota käytetään todistuksessa sen jälkeen, kun annetaan ehdot matriisimuunnokselle sarjan tapauksessa. Seuraava todistus on kirjasta [2, s. 66].

Lemma 3.25. *Jos $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_k$ suppenee jokaisella $\omega > \omega_0$, kun $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ suppenee, niin $|g_k(\omega)|$ on rajoitettu, kun $k \to \infty$ jokaisella $\omega > \omega_0$.*

Todistus. Todistetaan väite kontrapositiolla. Oletetaan, että $|g_k(\omega)|$ ei ole rajoitettu. Tällöin on olemassa jono (k_r) siten että $|g_{k_r}(\omega)| > r^2$ $(r = 1, 2, \ldots)$. jokaiselle $\omega > \omega_0$. Olkoon $c_k = 0$ $(k \neq k_r)$ ja $c_{k_r} = \frac{\mathrm{sgn}(g_{k_r}(\omega))}{r^2}$. Kompleksiluvuille z merkitään $\mathrm{sgn}(z) = \frac{|z|}{z}$ ja $\mathrm{sgn}(0) = 0$. Tällöin siis $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega) c_k = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|g_{k_r}(\omega)|}{r^2} = \infty$. Tällöin sarja ei siis suppene, joten kontrapositio on todistettu ja alkuperäinen väite pätee. □

Todistetaan vielä toinen lemma, jota käytetään todistuksessa sen jälkeen. Lemma on esitetty ja todistettu kirjassa [3, s.394].

Lemma 3.26. *Riittävä ja välttämätön ehto, että $\sum_{k=1}^{\infty} g_k c_k$ suppenee kaikilla suppenevilla sarjoilla $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = s$, on $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k - g_{k+1}| < \infty$.*

Todistus. Olkoon osasumma $\sum_{k=1}^{n} g_k c_k = \sum_{k=1}^{n-1} (g_k - g_{k+1}) s_k + g_n s_n$, missä lausekkeen oikeapuoli on jonon $s_k = c_1 + c_2 + \ldots + c_k$ muunnos matriisilla $a_{n,k} = g_k - g_{k+1}$, jos $k < n$, $a_{n,n} = g_n$, $a_{n,k} = 0$, jos $k > n$.

Todistetaan, että ehdosta $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k - g_{k+1}| < \infty$ seuraa, että muunnos toteuttaa lauseen 3.19 ehdot 1-3, ja että ehto 1 lauseessa 3.19, joka tässä tapauksessa on muodossa $\sum_{k=1}^{n-1} |g_k - g_{k+1}| + |g_n| \leq M$ on yhtäpitävä ehdon $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k - g_{k+1}| < \infty$ kanssa.

Jos ehto $\sum_{k=1}^{\infty}|g_k - g_{k+1}| < \infty$ toteutuu, niin kirjoitetaan $\epsilon_k = g_k - g_{k+1}$, $\sum_{k=1}^{\infty}|\epsilon_k| = E$. Siten $g_n = g_1 - \sum_{k=1}^{n-1}\epsilon_k$. Tällöin $|g_n| \leq |b_1| + E$. Tällöin $\sum_{k=1}^{n-1}|g_k - g_{k+1}| + |g_n| \leq M$ toteutuu ja tästä seuraa myös ehto $\sum_{k=1}^{\infty}|g_k - g_{k+1}| < \infty$. Muunnosmatriisi toteuttaa ehdon 2 lauseessa 3.19, sillä k:n ollessa vakio, termit ovat riippumattomia n:stä. Kun $n > k$, niin $\alpha_k = g_k - g_{k+1}$. Lopuksi

$$A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{n-1}(g_k - g_{k+1}) + g_n = g_1,$$

joka on riippumaton n:stä. Silloin ehto 3 lauseessa 3.19 toteutuu, ja $\alpha = g_1$. Siis ehdot 1-3 ovat voimassa ja siitä seuraa

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k c_k = g_1 s + \sum_{k=1}^{\infty}(g_k - g_{k+1})(s_k - s),$$

mistä toisen puolen olemassaolosta seuraa toisenkin puolen olemassaolo, jos $\lim_{k\to\infty} s_k = s$. Tämä todistaa lemman. □

Annetaan seuraavassa ehdot sille, että matriisimuunnos säilyttää sarjan suppenemisen.

Lause 3.27. *Välttämättömät ja riittävät ehdot, että*

$$\lim_{\omega\to\infty}\gamma(\omega) = \lim_{\omega\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega)c_k < \infty$$

kaikilla suppenevilla sarjoilla $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = s$*, ovat*

1. $\sum_{k=1}^{\infty}|g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)| \leq M$ *jokaiselle* $\omega > \omega_0$
2. $\lim_{\omega\to\infty} g_k(\omega) = \beta_k < \infty$ *jokaiselle* k*.*

Jos ehdot 1-2 toteutuvat, niin $\lim_{\omega\to\infty}\gamma(\omega) = \beta_1 s + \sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k - \beta_{k+1})(s_k - s)$*, missä* $s_k = \sum_{r=1}^{k} c_r$*.*

Todistus. Todistetaan ensimmäiseksi, että ehdot ovat riittävät. Ehdoista 1 ja $s_k \to s$ seuraa, että oikea puoli lausekkeesta

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega)c_k = sg_1(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)\right)(s_k - s) \tag{3.6}$$

on olemassa. Valitaan seuraavaksi p siten että $|s_k - s| < \frac{\epsilon}{M}$, kun $k > p$. Kirjoitetaan lauseke (3.6) muotoon

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega)c_k = sg_1(\omega) + \left(\sum_{k=1}^{p} \left(g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)\right)(s_k - s) + \sum_{k=p+1}^{\infty} \left(g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)\right)(s_k - s)\right).$$

Ehdon 2 nojalla saadaan

$$\lim_{\omega\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \left(g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)\right)(s_k - s) = \sum_{k=1}^{p} (\beta_k - \beta_{k+1})(s_k - s).$$

Lisäksi ehdon 1 nojalla $\left|\sum_{k=p+1}^{\infty} \left(g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)\right)(s_k - s)\right| < \epsilon$, jokaisella $\omega > \omega_0$ sillä $|s_k - s| < \frac{\epsilon}{M}$, kun $k > p$. Ehdon 2 nojalla $\lim_{\omega\to\infty} g_1(\omega) = \beta_1$, joten tällöin saadaan

$$\lim_{\omega\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega)c_k = \beta_1 s + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \beta_{k+1})(s_k - s).$$

Ehdot 1-2 ovat siis riittävät. Todistetaan seuraavaksi, että ehdot ovat välttämättömät. Oletetaan, että $\gamma(\omega)$ on olemassa, kun $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ suppenee. Lisäksi oletuksen nojalla $\lim_{\omega\to\infty} \gamma(\omega)$ on olemassa. Silloin ottamalla $c_k = 0$ kun $k \neq q$ ja $c_q = 1$, saadaan $\lim_{\omega\to\infty} g_q(\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \gamma(\omega) = \beta_q < \infty$. Ehto 2 on siis välttämätön.

Koska $\gamma(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega)c_k$ on äärellisenä olemassa, niin lemman 3.26 nojalla

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)| < \infty,$$

kun $\omega > \omega_0$. Todistetaan, että tämä pätee myös, kun $\omega \to \infty$. Oletuksen nojalla lausekkeen (3.6) vasen puoli on olemassa. Ehdon 2 nojalla $\lim_{\omega\to\infty} g_1(\omega) = \beta_1$. Silloin lausekkeen (3.6) oikea puoli on olemassa, kun $\omega \to \infty$. Siis ehto 1 on välttämätön. □

Ehtojen 1-2 täyttävää matriisia sanotaan $\beta-$*matriisiksi*. Mikäli ehto 2 on muodossa $\lim_{\omega\to\infty} g_k(\omega) = 1$ jokaisella vakiolla k, niin matriisia sanotaan γ - matriisiksi.

Tässä kappaleessa käytetty lähdeteos mainitsee tällaisia matriiseja nimeltä mainiten, muttei todista niitä γ– matriisiksi. Esitellään yksi tällainen matriisi, jota kutsutaan *Abel–muunnos*– matriisiksi.

Esimerkki 3.28. *Abel– muunnosmatriisi, jossa* $g_k(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^k$ *on* γ– *matriisi.*

Todistus. Todistetaan γ– matriisin ominaisuudet. Ominaisuus 1 todistetaan suoralla laskulla. Käyttämällä geometrisen sarjan summaa (sillä $\frac{\omega}{\omega+1} < 1$) saadaan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(\omega) - g_{k+1}(\omega)| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^k - \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^{k+1} \right|$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^k \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)\right) \right| = \left| \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)\right) \right| \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^k \right|$$
$$= \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)\right) \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)} - 1\right) = 1 - 1 + \frac{\omega}{\omega+1} = \frac{\omega}{\omega+1} \leq M,$$

kun $M = 1$. Ominaisuus 2 todistetaan myös suoralla laskulla. Tällöin

$$\lim_{\omega\to\infty} g_k(\omega) = \lim_{\omega\to\infty} \left(\frac{\omega}{\omega+1}\right)^k = \lim_{\omega\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\omega}}\right)^k = 1^k = 1.$$

Abel– matriisi toteuttaa siis ominaisuudet 1-2 ja on siten γ– matriisi. □

Lähteissä [2, s.68-73] ja [3, s.400-406] on esiteltynä lisää edellisten kappaleiden toteuttavia matriiseja. Kuten edellä on käynyt ilmi, on jonkin matriisin todistaminen K, T, γ tai β – matriisiksi on suoraviivainen prosessi, joskin pitkällinen.

4. LINEAARISET JA RAJOITETUT OPERAATTORIT

Ääretönulotteisten matriisien yksi sovelluskohde on varsinkin jonoavaruuksien lineaarisina operaattoreina toimiminen, sillä lineaarisista ja rajoitetuista operaattoreista voidaan muodostaa matriisi tietyillä ehdoilla. Määritellään tässä luvussa lineaaristen ja rajoitettujen operaattoreiden perusominaisuuksia ja tarkastellaan esimerkiksi operaattorin inverssiä ja ominaisarvoja. Lisäksi todistetaan tärkeä *Banach-Steinhausin lause*, jota käytetään myös seuraavissa kappaleissa. Perusosiltaan luku seuraa lähdettä [14], jonka lukijalle jätettyjä lauseiden todistuksia on lisätty tähän kappaleeseen. Banach-Steinhausin lausetta käsittelevä kappale seuraa lähdettä [10]. Joitain lauseita on otettu lähteestä [17], joista huomautetaan erikseen. Näitä todistuksia on pyritty laajentamaan ja selventämään.

Määritelmä 4.1. *Kuvausta $T : V \mapsto W$, missä V, W ovat lineaarisia normiavaruuksia, kutsutaan operaattoriksi. Operaattoria sanotaan lineaariseksi, mikäli*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x, y \in V.$$

Määritelmä 4.2. *Lineaarisen operaattorin T nolla-avaruus $\mathscr{N}(T)$ määritellään seuraavasti:*

$$\mathscr{N}(T) = \{x \mid Tx = 0\}.$$

Lineaarisen operaattorin kuva-avaruus $\mathscr{R}(T)$ määritellään seuraavasti:

$$\mathscr{R}(T) = \{y = Tx \mid x \in \mathscr{D}(T)\},$$

missä $\mathscr{D}(T)$ on avaruus, jossa T on määritelty (yleensä $\mathscr{D}(T) \subseteq V$, missä V on *lineaarinen normiavaruus).*

Tässä diplomityössä tarkastellaan rajoitettuja lineaarisia operaattoreita. Rajoittuneisuus on yksi operaattorin ominaisuus, joka määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 4.3. *Lineaarinen operaattori $T : V \mapsto W$ on rajoitettu, jos $\exists\ M \in \mathbb{R}_+$ siten että*

$$\|T(x)\|_W \leq M \|x\|_V < \infty \ \forall x \in V.$$

Tässä diplomityössä käytetyissä tarkasteluissa vaaditaan usein lineaarisen operaattorin (ja sitä kautta myös ääretönulotteisen matriisin) normia. Määritellään lineaarisen operaattorin normi seuraavaksi.

Määritelmä 4.4. *Olkoon V, W normiavaruuksia. Lineaarisen rajoitetun operaattorin $T : V \mapsto W$ operaattorinormi on*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_V = 1} \|T(x)\|_W .$$

Tässä $\|\cdot\|_V$ on avaruuden V normi ja $\|\cdot\|_W$ avaruuden W normi.

Seuraus 4.5. *Mikäli lineaarinen operaattori $T : V \mapsto W$ on rajoitettu, niin*

$$\|T\| \leq M < \infty,$$

missä $M \in \mathbb{R}_+$.

Todistus. Käyttämällä määritelmiä 4.3 ja 4.4 saadaan

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_V = 1} \|T(x)\|_W \leq \sup_{\|x\|_V = 1} M \|x\|_V = M \sup_{\|x\|_V = 1} \|x\|_V = M.$$

□

Seuraavaa lemmaa voidaan käyttää varsinkin analyysissa. Seuraava lause on jätetty lukijalle todistettavaksi lähteessä [14].

Lemma 4.6. *Olkoon $T : V \mapsto W$ lineaarinen ja rajoitettu operaattori ja V, W normiavaruuksia. Tällöin*

$$\|T(x)\|_W \leq \|T\| \, \|x\|_V \, .$$

Todistus. Käyttämällä lineaarisen operaattorin ominaisuuksia ja muokkaamalla lauseketta saadaan

$$\|T(x)\|_W = \left\| \|x\|_V \, T\left(\frac{x}{\|x\|_V}\right) \right\|_W = \|x\|_V \, \|T(y)\|_W \leq \|x\|_V \sup_{\|y\|_V = 1} \|T(y)\|_W = \|T\| \, \|x\|_V \, ,$$

koska $\left\| \frac{x}{\|x\|_V} \right\|_V = \|y\|_V = 1.$ □

Annetaan seuraavassa määritelmä ja ehdot jatkuvalle operaattorille. Määritelmä ja ehdot ovat lähteestä [14].

Määritelmä 4.7. *Operaattori $T : V \mapsto W$, missä V, W ovat lineaarisia normiavaruuksia on jatkuva pisteessä $x \in \mathscr{D}(T)$ jos $\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ \delta_\epsilon > 0$ siten että*

$$y \in \mathscr{D}(T), \ \|x - y\|_V < \delta_\epsilon(x) \implies \|T(x) - T(y)\|_W < \epsilon.$$

T on tasaisesti jatkuva, jos $\forall \epsilon > 0, \ \exists \ \delta_\epsilon > 0$ siten että

$$x, y \in \mathscr{D}(T), \ \|x - y\|_V < \delta_\epsilon \implies \|T(x) - T(y)\|_W < \epsilon.$$

Määritelmä 4.8. *Lineaarinen rajoitettu operaattori $T : \mathscr{D}(T) \subseteq X \mapsto Y$ on tiheästi määritelty, jos $\mathscr{D}(T)$ on tiheä avaruudessa X.*

Lause 4.9. *Olkoon X, Y lineaarisia normiavaruuksia ja $T : X \mapsto Y$ lineaarinen operaattori. Seuraavat ehdot ovat ekvivalentit:*

1. *T on jatkuva jossain pisteessä $x_0 \in X$*
2. *T on tasaisesti jatkuva koko X:ssä*

3. T on rajoitettu.

Todistus. ($1 \leftrightarrow 2$) Olkoon T jatkuva pisteessä x_0. Olkoon lisäksi $z \in X$ ja oletetaan, että $\|y - z\|_X < \delta$. Olkoon $x = y - z + x_0$. Silloin $x - x_0 = y - z$. Käyttämällä jatkuvuuden määritelmää ja T:n lineaarisuutta saadaan $\|T(y) - T(z)\|_Y = \|T(x) - T(x_0)\|_Y < \epsilon$. Siispä T on tasaisesti jatkuva. Käänteinen suunta on triviaali.

($2 \to 3$) Olkoon T on tasaisesti jatkuva X:ssä, tällöin se on myös jatkuva 0:ssa. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten että $\|T(u)\|_Y \leq 1$ jos $\|u\|_X \leq \delta$. Jokainen x voidaan kirjoittaa $x = cu$, missä $\|u\|_X = \delta$ ja $c = \delta^{-1} \|x\|_X$. Tällöin

$$\|Tx\|_Y = c \|Tu\|_Y \leq c = \delta^{-1} \|x\|_X .$$

Ottamalla $M = \delta^{-1}$ saadaan T todistettua rajoitetuksi.

($3 \to 2$) Olkoon T rajoitettu. On selvää, että T on silloin jatkuva 0:ssa ja siten tasaisesti jatkuva koko X:ssä. Ehdot 1-3 ovat siis ekvivalentit. □

Määritelmä 4.10. *Olkoon T lineaarinen ja rajoitettu operaattori ja H Hilbert-avaruus. Operaattorin T adjungoitu operaattori T^* on sellainen operaattori, jolle*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \ \ \forall x, y \in H.$$

Seuraus 4.11. *Lineaarisen ja rajoitetun operaattorin T:n adjungoitu operaattori T^* on rajoitettu ja lisäksi*

$$\|T\| = \|T^*\| .$$

Todistus. Olkoon $y \in H$. Tällöin käyttämällä sisätulon indusoimaa normia ja lemmoja 2.18 ja 4.6, saadaan

$$\|T^*(y)\|^2 = \langle T^*(y), T^*(y)\rangle = \langle TT^*(y), y\rangle \leq \|TT^*(y)\| \|y\| \leq \|T\| \|T^*(y)\| \|y\| .$$

Tästä seuraa, että $\|T^*(y)\| \leq \|T\| \|y\|$ ja siis T^* on rajoitettu. Siten myös $\|T^*\| \leq$

$\|T\|$ seurauksen 4.5 nojalla. Vaihtamalla T^* ja T päikseen edellisessä päättelyssä saadaan $\|T\| \leq \|T^*\|$ ja siten $\|T\| = \|T^*\|$. □

Seuraus 4.12. *Lineaariselle ja rajoitetulle operaattorille Hilbert-avaruudessa pätee*

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 .$$

Todistus. Olkoon T lineaarinen ja rajoitettu operaattori ja T^* sen adjungoitu operaattori. Olkoon lisäksi $x \in H$, jolle $\|x\| = 1$. Tällöin saadaan Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\| \|x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T^*Tx\| \|x\| \\ &= \|T^*T\| . \end{aligned}$$

Silloin $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 \leq \|T^*T\|$. Operaattorinormin määritelmästä seuraa, että $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. Toisaalta $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\| \|T\| = \|T\|^2$, seurauksen 4.11 nojalla. Siten

$$\|T\|^2 = \|T^*T\| .$$

□

Määritelmä 4.13. *Olkoon H Hilbert-avaruus ja $T : H \mapsto H$ lineaarinen ja rajoitettu operaattori. T on itse-adjungoitu jos*

$$T = T^*.$$

4.1 Operaattorin inverssi

Määritelmä 4.14. *Olkoon T lineaarinen ja rajoitettu operaattori ja $T : V \mapsto V$, jossa V on lineaarinen normiavaruus. T:llä on rajoitettu inverssi, jos on olemassa rajoitettu operaattori $H : V \mapsto V$ siten että*

$$TH = I = HT.$$

Tässä I on identiteettioperaattori, jolle $Ix = x\ \forall x \in V$. T:n inverssiä merkitään T^{-1}. Yleisemmin inverssi määritellään operaattoriksi, joka kuvaa kuva-avaruuden alkiot takaisin määrittelyjoukkoon. Tällöin merkitään $H : \mathscr{R}(T) \mapsto \mathscr{D}(T)$.

Seuraus 4.15. *T^{-1} on lineaarinen operaattori.*

Todistus. Olkoon T lineaarinen ja rajoitettu operaattori, jolla on inverssi T^{-1}. Selvästi myös identiteettioperaattori I on lineaarinen. Olkoon $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $x, y \in V$. Tällöin käyttämällä I:n ja T:n lineaarisuutta saadaan

$$\begin{aligned} TT^{-1}(\alpha x + \beta y) &= I(\alpha x + \beta y) = \alpha Ix + \beta Iy = \alpha TT^{-1}x + \beta TT^{-1}y \\ &= T(\alpha T^{-1}x + \beta T^{-1}y). \end{aligned}$$

Operoikoon operaattori T^{-1} molempiin puoliin, jolloin $T^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha T^{-1}x + \beta T^{-1}y$. T^{-1} on siis lineaarinen operaattori. □

Todistetaan seuraavaksi lause, jonka avulla voidaan laskea tietyillä ehdoilla operaattorin $I - T$:n inverssi. Lause tunnetaan nimellä *Neumannin sarja.*

Lause 4.16 (Neumannin sarja)**.** *Olkoon T lineaarinen ja rajoitettu operaattori. Mikäli $\|T\| < 1$, niin $(I - T)$:n lineaarinen ja rajoitettu inverssi saadaan seuraavasti:*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Todistus. Koska $||T|| < 1$ niin sarja $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ suppenee (todistus [14, s.30]). Olkoon

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k.$$

Nyt

$$(I-T)S_n = (I-T)(I+T+\ldots+T^n) = I-T^{n+1} = (I+T+\ldots+T^n)(I-T) = S_n(I-T).$$

Koska $T^n \to 0$, ja $S_n \to S$, kun $n \to \infty$, niin

$$(I - T)S = I = S(I - T).$$

Tästä saadaan väite. $\square$

Seuraava lause liittää yhteen nolla-avaruuden ja inverssin olemassaolon. Lause on esitetty ja todistettu lähteessä [17].

Lause 4.17. *Olkoon X lineaarinen normiavaruus ja A lineaarinen operaattori, jonka määrittelyjoukko $\mathscr{D}(A) \subseteq X$ ja $\mathscr{R}(A) \subseteq Y$, missä Y on lineaarinen normiavaruus. Silloin A^{-1} on olemassa jos ja vain jos $\mathscr{N}(A) = 0$.*

Todistus. Oletetaan, että A^{-1} on olemassa. Jos $Ax = 0$, niin $x = A^{-1}Ax = A^{-1}0 = 0$, koska A^{-1} on lineaarinen. Siten siis $\mathscr{N}(A) = 0$. Olkoon seuraavaksi $\mathscr{N}(A) = 0$. Olkoon lisäksi $Ax_1 = Ax_2$. A:n ollessa lineaarinen, saadaan $A(x_1 - x_2) = 0$. Siten $x_1 - x_2 \in \mathscr{N}(A)$. Tällöin täytyy olla $x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = x_2$. A on siis injektiivinen ja A^{-1} siis olemassa. A^{-1} on lineaarinen, joka käy ilmi seurauksesta 4.15. $\square$

Seuraava lause antaa ehdon, milloin operaattorilla T on inverssi. Lause on kirjasta [17], mutta lauseen todistuksessa lukijalle jätettyjä kohtia on lisätty.

Lause 4.18. *Olkoon T lineaarinen operaattori ja $T : X \mapsto Y$. Tällöin on olemassa rajoitettu T^{-1} jos ja vain jos on olemassa $m > 0$ siten että*

$$m \left\| x \right\|_X \leq \left\| T(x) \right\|_Y .$$

Todistus. Oletaan ensimmäiseksi, että $m \left\| x \right\|_X \leq \left\| T(x) \right\|_Y$. Jos $T(x) = 0$ niin $x = 0$. Silloin lauseen 4.17 nojalla T^{-1} on olemassa.

Nyt $y = T(x) \iff x = T^{-1}(y)$. Siten oletuksen nojalla $m \left\| T^{-1}(y) \right\|_X \leq \left\| y \right\|_Y$ tai $\left\| T^{-1}(y) \right\| \leq \frac{1}{m} \left\| y \right\|_Y \ \forall y \in \mathscr{R}(T)$. Lauseen 4.9 nojalla T^{-1} on myös jatkuva.

Oletetaan seuraavaksi että T^{-1} on olemassa. Tällöin pätee käyttämällä lemmaa 4.6

$$\left\| x \right\|_X = \left\| T^{-1}(y) \right\|_X \leq \left\| T^{-1} \right\| \left\| y \right\|_Y = \left\| T^{-1} \right\| \left\| T(x) \right\|_Y .$$

Jakamalla molemmat puolet $\|T^{-1}\|$:llä ja valitsemalla $m = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ saadaan väite todistettua. $\square$

4.2 Banach-Steinhausin lause

Banach-Steinhausin lause on yksi perustavanlaatuisimpia tuloksia normiavaruuksien teoriassa. Sillä on monenlaisia sovelluskohteita analyysin eri haaroissa, ja lausetta käytetään varsinkin kappaleessa 5. Tämä kappale seurailee pääosin lähdettä [10]. Todistetaan aluksi tulos, joka on hieman yleisempi kuin Banach-Steinhausin lause. Lause on esitetty ja todistettu lähteessä [10, s.114].

Lause 4.19. *Olkoon X p-normiavaruus (ks. määritelmä 2.21). Olkoon F jatkuvien seminormien joukko ja lisäksi $M(x) \in \mathbb{R}_+$ jokaiselle $x \in X$, siten että*

$$q(x) \leq M(x) < \infty,$$

Siten on olemassa vakio M siten että

$$q(x) \leq M \|x\|^{1/p},$$

jokaiselle $x \in X$ ja jokaiselle $q \in F$.

Todistus. Jos nyt $d(x, y) = \|x - y\|$, niin X on metrinen avaruus, joten *tasaisen rajoituksen periaatteen* [10, s.67] nojalla on olemassa suljettu pallo $S[a, r]$ ja vakio H siten, että $q(x) \leq H$ kaikille $q \in F$. Valitaan $x \in X$, siten että $\|x\| > 0$. Silloin

$$q(sx) = q(sx + a - a) \leq q(sx + a) + q(a),$$

missä $s = \left(\frac{r}{\|x\|}\right)^{1/p}$. Koska $a \in S[a, r]$ saadaan $q(a) \leq H$ jokaiselle $q \in F$. Lisäksi $sx + a \in S[a, r]$ koska $\|sx\| = r$. Siispä $q(sx) = sq(x) \leq 2H$ jokaiselle $q \in F$, ja siten

$$q(x) \leq 2H \|x\|^{1/p} r^{-1/p},$$

Tapaus $x = 0$ sisältyy yllä olevaan epäyhtälöön – silloin molemmat puolet ovat 0:ia. Lause saadaan todistettua, kun valitaan $M = 2Hr^{-1/p}$. $\square$

Seuraus 4.20. *Olkoon X p-normiavaruus ja oletetaan, että (q_n) on jatkuvien seminormien jono siten että*

$$\lim_{n\to\infty} q_n(x) = q(x).$$

Silloin q on jatkuva seminormi X:ssä.

Todistus. On selvää, että q on seminormi X:ssä, sillä esimerkiksi

$$q_n(x+y) \leq q_n(x) + q_n(y) \implies q(x+y) \leq q(x) + q(y),$$

kun $n \to \infty$. Oletuksen nojalla jonon $(q_n(x))$ suppeneminen tarkoittaa, että se on rajoitettu ja lauseen 4.19 nojalla $q_n(x) \leq M \|x\|^{1/p}$ jokaiselle n ja jokaiselle $x \in X$. Siispä $q(x) \leq M \|x\|^{1/p}$ joten q on jatkuva X:ssä. $\square$

Yhdistämällä lause 4.19 ja seuraus 4.20 saadaan Banach-Steinhausin lause.

Lause 4.21 (Banach-Steinhaus)**.** *Jos (A_n) on rajoitettujen lineaaristen operaattoreiden jono, jotka on määritelty Banach-avaruudesta X normiavaruuteen Y ja*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n(x)\| < \infty.$$

Tällöin $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$, ja normien jono $(\|A_n\|)$ on siis rajoitettu.

Todistus. Banach-avaruus on täydellinen ja normiavaruus, joten avaruus X on myös. Jokaiselle n, $q_n(x) = \|A_n(x)\|$ määrittää jatkuvan seminormin q_n, koska $A_n : X \mapsto Y$ ja A_n on lineaarinen ja rajoitettu. Oletuksen nojalla voidaan käyttää lausetta 4.19 ja siten saadaan $q_n(x) \leq M \|x\|$ jokaiselle n ja jokaiselle $x \in X$. Tällöin siis $\|A_n\| \leq M$ jokaiselle n, kuten vaadittu. $\square$

4.3 Operaattorin ominaisarvot ja spektri

Tässä kappaleessa tutkitaan mitä operaattorin ominaisarvoilla ja sen spektrillä tarkoitetaan ja annetaan näille määritelmät. Nämä ovat operaattorien tärkeitä ominaisuuksia ja niitä tutkitaan myös kappaleessa 6 ääretönulotteisten matriisien avulla.

Määritelmä 4.22. *Olkoon V lineaarinen normiavaruus ja $T : V \mapsto V$. Tällöin $\lambda \in \mathbb{C}$ on T:n ominaisarvo, jos*

$$Tx = \lambda x,$$

jollain $x \in V$.

Lause 4.23. *Olkoon V lineaarinen normiavaruus. Oletetaan, että $T : V \mapsto V$ on olemassa inverssi T^{-1}, ja että operaattorilla $A : V \mapsto V$ on ainakin yksi ominaisarvo. Tällöin A:lla ja TAT^{-1}:lla on samat ominaisarvot.*

Todistus. Olkoon λ A:n ominaisarvo. Silloin

$$Ax = \lambda x,$$

jollain $x \in V$.

Koska T^{-1} on olemassa, niin $Ax = \lambda x \implies T^{-1}TAT^{-1}Tx = \lambda x$. Silloin
$T^{-1}\left(TAT^{-1}\right)Tx = \lambda x \implies \left(TAT^{-1}\right)(Tx) = \lambda\,(Tx)$. Siten λ on TAT^{-1} ominaisarvo.

Olkoon seuraavaksi TAT^{-1}:llä ominaisarvo λ. Osoitetaan, että se on myös A:n ominaisarvo. Tällöin

$$TAT^{-1}x = \lambda x, \tag{4.1}$$

jollain $x \in V$. Operoikoon T^{-1} yhtälöön (4.1). Tällöin

$$
\begin{aligned}
T^{-1}TAT^{-1}x &= \lambda T^{-1}x \\
AT^{-1}x &= \lambda T^{-1}x \\
A\tilde{x} &= \lambda \tilde{x},
\end{aligned}
$$

missä $\tilde{x} = T^{-1}x$. Siis päinvastainen tulos on voimassa. $\square$

Lause 4.24. *Kaikki ominaisarvot itse-adjungoidulla operaattorilla Hilbert-avaruudessa ovat reaalisia.*

Todistus. Olkoon $T : H \mapsto H$ itse-adjungoitu ja λ T:n ominaisarvo. Silloin $\exists\ x \in H$ ja $x \neq 0$ siten että

$$Tx = \lambda x.$$

Huomataan, että käyttämällä sisätulon ja itse-adjungoidun operaattorin ominaisuuksia saadaan $\lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \overline{\lambda} \langle x, x \rangle$. Koska $\langle x, x \rangle \ > 0$ niin $\lambda = \overline{\lambda}$ ja λ on siis reaalinen. $\square$

Määritellään seuraavaksi, mitä tarkoitetaan operaattorin resolventtijoukolla ja spektrillä. Tämän jälkeen määritellään spektrin osat.

Määritelmä 4.25. *Olkoon V lineaarinen normiavaruus ja T lineaarinen operaattori, siten että*

$$T : \mathscr{D}(T) \subseteq V \mapsto V$$

Tällöin T:lle voidaan määrittää uusi operaattori

$$T_\lambda = T - \lambda I,$$

missä $\lambda \in \mathbb{C}$ ja I $\mathscr{D}(T)$:n identiteettioperaattori. Jos T_λ:lla on inverssi, niin T_λ:n inverssiä kutsutaan resolventiksi ja sitä merkitään seuraavasti:

$$R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}.$$

Määritelmä 4.26. *Lineaarisen ja rajoitetun operaattorin $T : V \mapsto V$ resolventtijoukko on*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : R_\lambda(T) \in B(H)\}.$$

Toisin sanoen resolventtijoukko koostuu niistä λ:sta joiden määrittelemä resolventtioperaattori on lineaarinen ja rajoitettu. Resolventtijoukon komplementtia

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

sanotaan operaattorin T spektriksi.

Spektri jakautuu λ:sta riippuen eri osiin, jotka ovat pisteittäin eroavat. Määritellään ja nimetään nämä osat seuraavaksi. Huomataan, että eri spektrin osilla on eri ominaisuudet.

Määritelmä 4.27. *Operaattorin spektri jakautuu seuraaviin osiin:*

1. *Operaattorin pistespektri $\sigma_p(T)$: $\lambda \in \sigma_p(T) \iff T - \lambda I$ ei ole injektiivinen*

2. *Operaattorin jatkuva spektri $\sigma_c(T)$: $\lambda \in \sigma_c(T)$ jos $T - \lambda I$ on injektiivinen ja $R_\lambda(T)$ on tiheästi määritelty ja ei-rajoitettu.*

3. *Operaattorin residuaalispektri $\sigma_r(T)$: $\lambda \in \sigma_r(T)$ jos $T - \lambda I$ on injektiivinen ja $R_\lambda(T)$ on olemassa mutta ei ole tiheästi määritelty.*

On huomattava, että $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$ [14, s.59]. Lisäksi spektrin osat ovat pistevieraita.

5. LINEAARISISTA JA RAJOITETUISTA OPERAATTOREISTA ÄÄRETÖNULOTTEISIIN MATRIISEIHIN

Tässä luvussa tutkitaan millä ehdoin lineaarisesta ja rajoitetusta operaattorista saadaan ääretönulotteinen matriisi. Tämä luku seuraa kirjan [10] lukua 7, mutta lukijalle jätettyjä todistuksia on lisätty tähän kappaleeseen ja lisäksi vaikeita kohtia on pyritty selventämään. Kappaleessa tutkitaan, mitä ehtoja vaaditaan ääretönulotteiselta matriisilta, että se esittää lineaarista ja rajoitettua operaattoria jonkin kahden jonoavaruuden välillä. Kappaleen loppupuolella tutustutaan esimerkein tällaisiin matriiseihin, jotka on pääosin otettu lähteiden ulkopuolelta.

Saksalainen matemaatikko Otto Toeplitz (1881- 1940) oli ensimmäisiä matemaatikkoja, joka tutki jonoavaruuksien välisiä matriisimuunnoksia. Toeplitz karakterisoi kaikki sellaiset ääretönulotteiset matriisit $A = (a_{n,k})$ $n, k = 1, 2, \ldots$, jotka kuvaavat jonoavaruuden c itselleen jättäen jokaisen suppenevan jonon raja-arvon muuttumattomaksi. Hän antoi välttämättömät ja riittävät ehdot matriisille A, jotta

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k$$

suppenee jokaisella n ja lähestyy raja-arvoa y_0, kun $n \to \infty$ ja $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$. Nämä ehdot tunnetaan *Toeplitz - ehtoina* ja ne saadaan johdettua helposti Banach-Steinhausin lauseesta [10, s.162]. Toeplitzilla vastaavaa lausetta ei kuitenkaan ollut käytössä [10, s.161].

Tarkastellaan seuraavissa kappaleissa useita lineaaristen ja rajoitettujen operaattoreiden matriisiesityksiä ja annetaan näille matriiseille välttämättömät ja riittävät ehdot, että ne voivat toimia lineaarisena ja rajoitettuna operaattorina.

5.1 Avaruuksien c ja c_0 – matriisiesitykset

Valitaan tarkasteluun jonoavaruus c_0. Muissa kappaleissa tämän jälkeen tarkastellaan myös muiden jonoavaruuksien välistä matriisikuvausta. Olkoon $A = (a_{i,j})$ ja $x = (x_k) \in c_0$. Operoikoon A jonoon x seuraavasti käyttämällä matriisilaskennasta tuttuja merkintöjä:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots \\ \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Käyttämällä matriisien kertolaskusääntöjä saadaan

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Tällöin siis jono x kuvautuu jonoksi Ax, jossa $(Ax)_n \equiv A_n(x)$. Tällöin siis

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}x_k,$$

olettaen, että sarja suppenee jokaisella n. Milloin matriisi A on lineaarinen ja rajoitettu operaattori, jolle $A : c_0 \mapsto c_0$? Annetaan seuraavassa ehdot tällaiselle matriisille.

Lause 5.1. *Olkoon A ääretönulotteinen matriisi. Matriisi A on lineaarinen ja rajoitettu operaattori $A : c_0 \mapsto c_0$, kun*

1. $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \right) < \infty$
2. $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0 \; \forall k$.

Jos ehdot 1 ja 2 ovat voimassa, niin $\|A\| = M$.

Todistus. Olkoon $x \in c_0$. Koska $c_0 \subset \ell^\infty$, niin voidaan käyttää $\|\cdot\|_\infty$ –normia. Koska $x \in c_0$, niin $\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = \|x\|_\infty < \infty$. Tällöin:

$$\|Ax\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}x_k| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \, \|x\|_\infty \leq M \, \|x\|_\infty \,, \tag{5.1}$$

kun $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}|\right) < \infty$. Toinen ehto nähdään seuraavasti. Olkoon x jono, jolle $x_k = 1$ ja $x_j = 0$, kun $j \neq k$. Tällöin $x \in c_0$. Nyt $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}x_k\right) = \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$. On siis osoitettu, että näiden ehtojen toteutuessa A on lineaarinen ja rajoitettu operaattori $A : c_0 \mapsto c_0$. On selvää, että A on lineaarinen, sillä ottamalla $x, y \in c_0$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ saadaan

$$\begin{aligned} A_n(\alpha x + \beta y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(\alpha x_k + \beta y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(\alpha x_k) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\beta y_k \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}x_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}y_k = \alpha A_n(x) + \beta A_n(y). \end{aligned}$$

A on rajoitettu, kuten nähtiin yhtälössä (5.1). Tällöin seurauksen 4.5 nojalla $\|A\| \leq M$. Pitää osoittaa, että $\|A\| = M$. Nyt on olemassa $m = m(\epsilon)$ siten että $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{m,k}| > M - \frac{\epsilon}{2}$ ja koska $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{m,k}| < \infty$ on olemassa $p = p(\epsilon)$ siten että

$$\sum_{k>p}^{\infty} |a_{m,k}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Olkoon nyt $x \in c_0$ siten että $x_k = \operatorname{sgn}\,(a_{m,k})$, kun $1 \leq k \leq p$ ja $x_k = 0$ kun $k > p$. Tällöin $\|x\|_\infty = 1$ ja siten

$$\frac{\|A(x)\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |A_n(x)| \geq |A_m(x)| > M - \epsilon.$$

Tästä seuraa $M = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \left(\frac{\|A(x)\|_\infty}{\|x\|_\infty}\right) = \|A\|$. □

Yllä osoitettiin lauseessa 5.1 minkätyyppiset matriisit määrittelevät rajoitetun lineaarisen operaattorin $A : c_0 \mapsto c_0$. Osoitetaan seuraavaksi päinvastainen tulos.

Lause 5.2. *Olkoon A lineaarinen ja rajoitettu operaattori $A : c_0 \mapsto c_0$. Silloin A määrittelee matriisin $(a_{n,k})$ siten että*

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k,$$

jokaiselle $x \in c_0$. Lisäksi

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| < \infty$
2. $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$ *k on vakio.*

Todistus. Jokainen $x \in c_0$ voidaan kirjoittaa $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, missä $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$ $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$ ja niin edelleen. A:n ollessa lineaarinen saadaan

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} x_k A e_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k (a_k^n),$$

jossa Ae_k on jokin jono $(a_k^1, a_k^2, \ldots) \in c_0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Koska $|x_n| \leq \|x\|_\infty$ jokaiselle n, kun $x \in c_0$, niin tällöin saadaan

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n x_k.$$

Kirjoitetaan tämä toisin:

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k.$$

Siten $(Ax)_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k$. Koska $Ax \in c_0$, niin myös $Ae_k \in c_0$.

Tällöin $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k'=1}^{\infty} a_{n,k} e_{k',k}\right) = \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$ jokaisella k. Banach-Steinhausin lausetta käyttäen voidaan osoittaa, että $\|A\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}|$. Tämä on esitetty lähteessä [10, s.164] □

Käyttämällä vastaavia menetelmiä kuin lauseessa 5.2 voidaan näyttää millainen ääretönulotteinen matriisi voi esittää lineaarista ja rajoitettua operaattoria kahden jonoavaruuden välillä. Seuraavassa kappaleessa tutkitaankin joitain tärkeitä lauseita, jotka antavat ehdot tällaiselle matriisille.

5.1.1 Silverman-Toeplitzin lause ja Kojima-Schurin lause

Silverman-Toeplitzin lause antaa välttämättömät ja riittävät ehdot, että ääretönulotteinen matriisi esittää lineaarista operaattoria, joka säilyttää jonon raja-arvon. Seuraava lause on esitetty ja todistettu lähteessä [10, s. 165], kuten myös sitä seuraava *Kojima-Schurin lause.*

Lause 5.3 (Silverman-Toeplitz)**.** *Välttämättömät ja riittävät ehdot sille, että ääretönulotteinen matriisi A on lineaarinen ja rajoitettu operaattori ja $A : c \mapsto c$, säilyttäen jonon raja-arvon muuttumattomana, ovat*

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \leq M < \infty$
2. $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0 \ \forall k$
3. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = 1.$

Todistus. Olkoon $x \in c$. Koska $c \subset \ell^{\infty}$, niin voidaan käyttää $\|\cdot\|_{\infty}$ - normia. Tällöin $\|x\|_{\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$. Todistetaan ensin ehdon 1 riittävyys. Nyt

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{\infty} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k \right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k} x_k| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \, \|x\|_{\infty} \\ &\leq M \|x\|_{\infty} < \infty, \end{aligned} \tag{5.2}$$

kun $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \leq M$.

Ehtojen 2 ja 3 riittävyys todistetaan seuraavasti. Koska A säilyttää raja-arvon jonolle (x_k), niin $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k = l$. Kirjoittamalla $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} (x_k - l) + l \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$ saadaan

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(x_k-l) + l\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = l,$$

kun $\lim_{n\to\infty} l\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = l \implies \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = 1$. Silloin $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(x_k - l) = 0$, eli

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(x_k-l) = \lim_{n\to\infty} a_{n,1}(x_1-l) + a_{n,2}(x_2-l) + \ldots = 0.$$

Tämä toteutuu, kun $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$ jokaisella vakiolla k. Ehdot 1-3 ovat siis riittävät.

Todistetaan seuraavaksi, että ehdot ovat välttämättömiä. Ehtojen 2 ja 3 välttämättömyys todistetaan seuraavasti. Olkoon $x = e_k$ ehdossa 2, $(k = 1, 2, \ldots)$. Selvästi $e_k \in c_0$. Tällöin $\lim_{n\to\infty}\sum_{k'=1}^{\infty} a_{n,k}e_{k',k} = \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$. Ehto on siis välttämätön.

Olkoon $x = e = (1, 1, \ldots) \in c$ ehdossa 3. Koska raja-arvo jonolle e on 1, niin saadaan

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}e_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = 1,$$

joten ehto 3 on välttämätön. Oletetaan, että A on rajoitettu, jolloin $\|A\| < \infty$. Tällöin lauseen 5.2 nojalla täytyy olla $\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n,k}| < \infty$. Ehto 1 on siis välttämätön.

Ehtojen 1-3 toteuttavaa matriisia sanotaan *Toeplitz– matriisiksi.* Lisätietoja Toeplitz– matriiseista ja niiden toimimisesta operaattoreina on saatavissa lähteistä [7] ja [9].

$\square$

Silverman-Toeplitzin lauseelle on olemassa myös yleistys, joka esitetään ja todistetaan seuraavaksi. Tämä lause tunnetaan nimellä *Kojima-Schurin lause.* Lause ei enää oleta, että jonojen ja sarjojen raja-arvot säilyisivät, mutta että suppeneminen säilyy. Lause ja sen todistus on kirjasta [10, s.166], mutta muutamia lukijalle jätettyjä kohtia on selvennetty.

Lause 5.4 (Kojima-Schur)**.** *Välttämättömät ja riittävät ehdot, että $A : c \mapsto c$ ovat*

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| < \infty$.
2. *Jokaiselle* $p \in \mathbb{N}$ *pätee* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=p}^{\infty} a_{n,k} = a_p < \infty$.

Todistus. Ehdon 1 välttämättömyys todistetaan samoin kuin lauseessa 5.3. Ehdon 2 välttämättömyys saadaan todistettua ottamalla $x = (0, 0, \ldots, 1, 1, 1, \ldots) \in c$, jossa ensimmäisen 1:n indeksi on p. Tällöin on oltava

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=p}^{\infty} a_{n,k} \right) = a_p < \infty.$$

Riittävyys todistetaan kun $\lim_{k\to\infty} x_k = l$, merkitsemällä

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(x_k - l) + l \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = s_n + t_n.$$

Silloin $t_n \to la_1$ ehdon 2 nojalla. Tulee vielä näyttää $s_n \to \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x_k - l)$, jossa $b_k = \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = a_k - a_{k+1}$ jokaiselle k. Selvästi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| < \infty,$$

ja siten $s_n - \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x_k - l) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n,k} - b_k)(x_k - l) = v_n$.

Lauseessa 5.1 vaihtamalla $x_k \to x_k - l$ ja $a_k \to a_n - b_k$ saadaan todistettua $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. Siten

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k \to l \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lim_{n\to\infty} a_{n,k} \right) (x_k - l),$$

kun $n \to \infty$. Lause on siis todistettu. □

5.2 Muiden lineaaristen ja rajoitettujen operaattoreiden matriisiesityksiä

Tutkitaan vielä muutamia jonoavaruuksien välisiä lineaarisia rajoitettuja operaattoreita. Tämä kappale seurailee lähteitä [10] ja [4], mutta lukijalle jätettyjä kohtia on lisätty tähän diplomityöhön. Lisäksi lopussa oleva ääretönulotteisen diagonaalimatriisin tarkastelu on lisätty diplomityöhön, eikä perustu mihinkään lähteeseen.

Tarkastellaan ensimmäiseksi lineaarisen rajoitetun operaattorin $A : \ell^2 \mapsto \ell^2$ matriisiesitystä. Mitkä ovat tällaiselle matriisille riittävät ja välttämättömät ehdot? Mikäli $x \in \ell^2$ niin $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|_2^2 < \infty$. Jos $Ax \in \ell^2$ täytyy olla $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k\right|^2 < \infty$. Tutkitaan milloin tämä tapahtuu. Arvioimalla summaa ylöspäin Cauchy-Schwartzin epäyhtälöllä sarjoille [13, s.548] saadaan

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}|^2\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right) = \|x\|_2^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}|^2 < \infty.$$

Siis $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}|^2 < \infty$ on riittävä ehto. Olkoon seuraavaksi A rajoitettu. Ottamalla jono $e_n \in \ell^2$ saadaan

$$\infty > \|A\| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|Ae_n\|_2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k} e_{k,n}|^2\right)^{1/2} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}|^2\right)^{1/2} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\|_2 .$$

Toisin sanoen jokaisen matriisin A rivillä a_n pätee $a_n \in \ell^2$. Tämä on välttämätön ehto. Lähteessä [4] on esimerkki siitä, kuinka tämä välttämätön ehto ei kuitenkaan ole riittävä:

Esimerkki 5.5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Jokaisella matriisin A rivillä a_n pätee $a_n \in \ell^2$. Olkoon $x = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, \frac{1}{8}, 0, \dots\right) \in \ell^2$, jossa $(n = 1, 2, \dots)$ ja jokainen 2^n termi on $\frac{1}{2^n}$. Tällöin $\|x\|_2 \leq 1$, mutta $Ax = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots)$ ja siten $\|Ax\|_2 \to \infty$.

Lineaarisen rajoitetun operaattorin $A : \ell^1 \mapsto \ell^p$ $(p \in [1, \infty))$ matriisiesitykselle saadaan välttämättömät ja riittävät ehdot seuraavasti. Jos $x \in \ell^1$ niin $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| =$

$\|x\|_1 < \infty$. Tutkitaan, millä ehdolla A on rajoitettu operaattori, eli $\|Ax\|_p \leq \|x\|_1 M < \infty$. Käyttämällä Minkowskin epäyhtälöä [13, s. 548] toistuvasti saadaan

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}x_k\right|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n,1}x_1|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n,2}x_2|^p\right)^{1/p} + \dots \\
&= |x_1|\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n,1}|^p\right)^{1/p} + |x_2|\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n,2}|^p\right)^{1/p} + \dots \\
&\leq (|x_1| + |x_2| + \dots)M^{1/p} = \|x\|_1 M^{1/p} < \infty,
\end{aligned}$$

missä $M = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,k}|^p$. Tämä on riittävä ehto. Ehdon välttämättömyys todistetaan seuraavasti. Oletetaan, että A on rajoitettu. Tällöin ottamalla $x = e_k \in \ell^1$, $(k = 1, 2, \dots)$, saadaan

$$\infty > M^{1/p} \geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|Ae_k\|_p = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k'=1}^{\infty} a_{n,k'}e_{k',k}\right|^p\right)^{1/p} = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n,k}|^p\right)^{1/p}.$$

Saatu ehto on siis välttämätön.

Lineaarisen ja rajoitetun operaattorin $A : \ell^1 \mapsto \ell^\infty$ matriisiesitys on hieman erilainen. Tutkitaan, millä ehdolla A on lineaarinen ja rajoitettu operaattori. Käyttämällä kolmioepäyhtälöä ja pienemmän ylärajan ominaisuuksia saadaan

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}x_k\right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n,k}|\,|x_k| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}}|a_{n,k}|\right)|x_k| \\
&= \left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\ \sup_{k\in\mathbb{N}}|a_{n,k}|\right)\sum_{k=1}^{\infty}|x_k| = \left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\ \sup_{k\in\mathbb{N}}|a_{n,k}|\right)\|x\|_1 < \infty,
\end{aligned}$$

kun $\sup_{n\in\mathbb{N}}\ \sup_{k\in\mathbb{N}}|a_{n,k}| < \infty$. Ehto on siis riittävä. Todistetaan vielä ehdon välttämättömyys. Olkoon A rajoitettu. Tällöin ottamalla $x = e_k$, $(k = 1, 2, \dots)$, niin saadaan

$$\infty > \|A\| \geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|Ae_k\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k'=1}^{\infty} a_{n,k'} e_{k',k} \right| \right) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_{n,k}| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_{n,k}| .$$

Saatu ehto on siis välttämätön.

5.2.1 Ääretönulotteinen diagonaalimatriisi jonoavaruuksissa

Tarkastellaan seuraavaksi ääretöntä diagonaalimatriisia A, joka operoi jonoon $x \in \ell^p$ seuraavasti:

$$A_n(x) = \alpha_n x_n,$$

missä $\alpha_n \in \mathbb{C}$. Tutkitaan millä ehdoin $A : \ell^p \mapsto \ell^q$ on rajoitettu lineaarinen operaattori. Tämä kappale ei seuraa mitään lähdettä, vaan ehdot on luotu itse. On selvää, että A on lineaarinen, sillä ottamalla $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ja $x, y \in \ell^p$, niin

$$A_n(\lambda x + \mu y) = \alpha_n(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \alpha_n x_n + \mu \alpha_n y_n = \lambda(A_n(x)) + \mu(A_n(y)).$$

Todistetaan seuraavaksi tärkeä lemma, jota käytetään tarkasteluissa sen jälkeen.

Lemma 5.6. *$\|x\|_q \leq \|x\|_p$, kun $p < q$.*

Todistus. Olkoon $p < q$. Oletetaan että jonolla $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $x_i \neq 0$ jollain i. Koska $\|tx\|_q = t\,\|x\|_q \leq t\,\|x\|_p = \|tx\|_p$ jollain $t > 0$, niin voidaan olettaa että

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} = 1.$$

Silloin $|x_n| \leq 1$ ja $|x_n|^q \leq |x_n|^p$ jokaisella n. Siten

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 1^p = 1.$$

Tällöin siis $1 \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q\right)^{1/q} = \|x\|_q$. Siten saadaan väite. □

Tarkastellaan nyt diagonaalimatriisia A ja ehtoja milloin A voi toimia lineaarisena rajoitettuna operaattorina jonoavaruuksien ℓ^p ja ℓ^q välillä. Olkoon $x \in \ell^p$, jolloin $\|x\|_p < \infty$. Jaetaan tarkastelu osiin.

1. Olkoon ensimmäiseksi $p = q$ ja $p, q \neq \infty$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}\|Ax\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\right|^p |x_n|^p\right)^{1/p} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| \, \|x\|_p \\ &= \|\alpha\|_\infty \|x\|_p .\end{aligned}$$

   Ehto $\|\alpha\|_\infty \leq M < \infty$ on siis riittävä. Oletetaan että A on rajoitettu. Olkoon lisäksi $x = e_n \in \ell^p$. Tällöin saadaan

$$\infty > \|A\| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|_p = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k e_{k,n}|^p\right)^{1/p} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| = \|\alpha\|_\infty .$$

   Saatu ehto on siis välttämätön.

2. Olkoon seuraavaksi $p, q = \infty$. Silloin käyttämällä pienemminnän ylärajan ominaisuuksia saadaan

$$\|Ax\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n x_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_\infty \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| = \|x\|_\infty \|\alpha\|_\infty .$$

   Ehto $\|\alpha\|_\infty \leq M < \infty$ on siis riittävä. Olkoon seuraavaksi A rajoitettu. Valitsemalla kuten edellä $x = (1, 1, \ldots)$, eli $\|x\|_\infty = 1$, niin

$$\infty > M = \|x\|_\infty M \geq \|Ax\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n x_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| = \|\alpha\|_\infty .$$

   Saatu ehto on siis välttämätön.

3. Olkoon seuraavaksi $p = \infty$ ja $q < \infty$. Tällöin jos $x \in \ell^\infty$ niin $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}\|Ax\|_q &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n|^q\right)^{1/q} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^q \|x\|_\infty^q\right)^{1/q} \le \|x\|_\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^q\right)^{1/q} \\ &= \|x\|_\infty \|\alpha\|_q .\end{aligned}$$

Ehto $\|\alpha\|_q \le M < \infty$ on siis riittävä. Oletetaan että A on rajoitettu. Olkoon $x = e = (1, 1, \ldots)$. Selvästi $x \in \ell^\infty$ ja $\|x\|_\infty = 1$. Nyt

$$\infty > M = \|x\|_\infty M \ge \|Ax\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^q\right)^{1/q} = \|\alpha\|_q .$$

Saatu ehto on siis välttämätön.

4. Olkoon seuraavaksi $p < \infty$ ja $q = \infty$. Koska $|x_n| \le \|x\|_p$ niin saadaan

$$\|Ax\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n x_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| |x_n| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_p\| |\alpha_n| = \|x\|_p \|\alpha\|_\infty .$$

Ehto $\|\alpha\|_\infty \le M < \infty$ on siis riittävä. Olkoon seuraavaksi A rajoitettu. Olkoon $x = e_n$. Tällöin

$$\infty > \|A\| \ge \sup_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n e_{n,k}|\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| = \|\alpha\|_\infty .$$

Saatu ehto on siis välttämätön.

5. Olkoon nyt $p < q$ ja $p, q \neq \infty$. Tällöin lemman 5.6 nojalla $\|Ax\|_q \le \|Ax\|_p$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}\|Ax\|_q \le \|Ax\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\right|^p |x_n|^p\right)^{1/p} \\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| \|x\|_p = \|\alpha\|_\infty \|x\|_p .\end{aligned}$$

Riittävä ehto on siis $\|\alpha\|_\infty \le M < \infty$. Olkoon nyt A rajoitettu. Olkoon lisäksi $x = e_n \in \ell^p$. Tällöin saadaan

$$\infty > \|A\| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|Ae_n\|_q = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k e_{k,n}|^q \right)^{1/q} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| = \|\alpha\|_\infty .$$

Saatu ehto on siis välttämätön.

6. Olkoon vielä lopuksi $p > q$. Käyttämällä Hölderin epäyhtälön laajennusta (seurausta 2.27), kun $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}$ saadaan

$$\|Ax\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n|^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^r \right)^{1/r} = \|x\|_p \|\alpha\|_r ,$$

missä $r = \frac{pq}{p-q}$. Ehto $\|\alpha\|_r \leq M < \infty$ on siis riittävä. Olkoon seuraavaksi A rajoitettu. Olkoon lisäksi x_n jono, missä $x_{n,k} = 0$, kun $k > n$ ja kun $k \leq n$ niin $x_{n,k} = \frac{|\alpha_k|^b}{M}$, missä $b, M \in \mathbb{R}_+$. Tällöin valitsemalla $b = \frac{r}{q} - 1$ ja $M = \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^r\right)^{1/p}$ saadaan

$$\begin{aligned}
\infty > \|A\| &\geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|Ax_n\|_q = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k x_{n,k}|^q \right)^{1/q} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^q \frac{|\alpha_k|^{bq}}{M^q} \right)^{1/q} \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{M} \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^{q+bq} \right)^{1/q} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^r\right)^{1/q}}{\left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^r\right)^{1/p}} \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^r \right)^{1/q-1/r} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^r \right)^{1/r} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^r \right)^{1/r} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^r \right)^{1/r} = \|\alpha\|_r .
\end{aligned}$$

Saatu ehto on siis välttämätön.

Kuten tässä kappaleessa on nähty, on mahdollista muodostaa ääretönulotteisille matriiseille ehtoja siihen, milloin ne voivat toimia lineaarisina rajoitettuina operaattoreina eri jonoavaruuksien välillä. On syytä olla tarkkana siitä, että matriisille annetaan tarpeeksi riittävät ja välttämättömät ehdot ja esimerkiksi erikoistapaukset on syytä tutkia tarkkaan. Kirjallisuudessa on esitettynä useita matriisiesityksiä eri jonoavaruuksien välille (ks. esimerkiksi [4] [10], [11]), mutta tapa näiden muodostamiseksi on samanlainen, kuin tässä kappaleessa esitetty.

6. ÄÄRETÖNULOTTEISEN MATRIISIN OMINAISARVOT JA SPEKTRI

Edellisissä kappaleissa on tutkittu ääretönulotteisten matriisien toimimista operaattoreina. Kappaleessa 4 tarkasteltiin lineaaristen ja rajoitettujen operaattoreiden yleisiä ominaisuuksia. Yksi ominaisuus oli operaattorin resolventti ja spektri. Tässä luvussa tutkitaan millaisia ovat ääretönulotteisen matriisin resolventtijoukko ja spektri. Ääretönulotteisen matriisin resolventin ja spektrin selvittäminen vaatii matriisin ominaisarvojen selvittämistä, joka on tuttu äärellisulotteisten matriisien tapauksesta. Kuitenkaan kaikille ääretönulotteisille matriiseille ei pystytä kovinkaan helposti löytämään ominaisarvoja. Täten tässä luvussa ei esitetä eksplisiittistsiä tuloksia, vaan keskitytään esimerkkeihin. Kussakin esimerkissä selvitetään ensiksi annetun matriisiin ominaisarvot ja tutkitaan resolventtijoukkoa ja spektrin osia. Oletetaan seuraavissa tarkasteluissa $A : \ell^p \mapsto \ell^p$. Tämä kappale ei seuraa mitään lähdettä, paitsi S_+:n jatkuvan spektrin tarkastelussa on tukeuduttu lähteeseen [13].

1. Olkoon A diagonaalimatriisi, jonka diagonaalialkiot muodostavat jonon $(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$. Matriisi A näyttää seuraavalta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Tutkitaan yhtälöä $(\lambda I - A)x = 0$, missä $x \in \ell^p$ ja $x \neq 0$. Tällöin yhtälö on muodossa

$$(\lambda I - A)x = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda - \frac{1}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0. \tag{6.1}$$

Huomataan, että yllä olevan yhtälön ei-triviaaleja ratkaisuita ovat jonot $e_k \in \ell^p$ $(k = 1, 2, \dots)$ ja vastaava ominaisarvo on A:n k:s diagonaaliarvo. Siten ominaisarvot ovat $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ ja nämä muodostavat siis A:n pistespektrin. Olkoon seuraavaksi $\lambda = 0$, jolloin $\lambda I - A = -A$. Silloin selvästi 0 ei ole ominaisarvo ja $-A$ siis injektio ja $-A^{-1}$ on siis olemassa. Näytetään seuraavassa, että $\mathscr{R}(-A) = S$, missä

$$S = \left\{ y \in \ell^p \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} k^p \left| y_k \right|^p < \infty \right\}.$$

Jos $y \in \mathscr{R}(-A)$ niin on olemassa yksikäsitteinen $x \in \ell^p$ siten että $-Ax = y$ eli $-\frac{x_k}{k} = y_k \iff x_k = -k y_k$.

Koska $x \in \ell^p$ niin y:lle saadaan ehto:

$$\infty > \|x\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |-k y_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} k^p \left| y_k \right|^p$$

Tällöin siis $\mathscr{R}(-A) \subset S$. Jos $y \in S$ ja määritellään $x_k = -k y_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin $x \in \ell^p$ ja $(Ax)_k = -\frac{x_k}{k} = -\frac{1}{k}(-k) y_k = y_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten $-Ax = y$ ja $S \subset \mathscr{R}(-A)$. On siis osoitettu $\mathscr{R}(-A) = S$. Näytetään nyt että $\mathscr{R}(-A)$ on tiheä. Olkoon $y \in C_0(\mathbb{N})$, kuten lemmassa 2.29. Tällöin on olemassa $N_y \in \mathbb{N}$ siten että $y_k = 0$, kun $n > N_y$. Silloin

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^p \left| y_k \right|^p = \sum_{k=1}^{N_y} k^p \left| y_k \right|^p < \infty,$$

joten $y \in \mathscr{R}(-A)$. Siis $C_0(\mathbb{N}) \subset \mathscr{R}(T)$ ja koska $C_0(\mathbb{N})$ on tiheä lemman 2.29 nojalla, niin $\mathscr{R}(-A)$ on tiheä. Näytetään vielä, että inverssi $(-A)^{-1}$ on ei-rajoitettu. Matriisin $-A$:n inverssi saadaan helposti diagonaalialkioiden käänteisluvuista seuraavasti:

$$(-A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Valitaan jono e_k, $k = (1, 2, \dots)$. Selvästi $e_k \in \mathscr{R}(-A)$ jokaisella k. Täten

$$\begin{aligned} \left\|(-A)^{-1}\right\| &= \sup_{\|y\|_p=1} \left\|(-A)^{-1}y\right\|_p = \sup_{\|y\|_p=1} \left\|(A)^{-1}y\right\|_p \geq \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\|(A)^{-1}e_k\right\|_p \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} k = \infty. \end{aligned}$$

Siis inverssi on ei-rajoitettu. Siis $-A$ on injektio, $\mathscr{R}(-A)$ on tiheä ja $(-A)^{-1}$ ei-rajoitettu, joten 0 on A:n jatkuvassa spektrissä.

Osoitetaan vielä jos $\lambda \notin \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ niin λ on matriisin A resolventissa. Matriisin A resolventtioperaattori näyttää siis seuraavalta:

$$(\lambda I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{\lambda-\frac{1}{2}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda-\frac{1}{3}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Selvästi $(\lambda I - A)^{-1}$ on lineaarinen. Se on myös rajoitettu, sillä resolventtioperaattorin diagonaalialkiot muodostavat suppenevan jonon: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lambda}$ ja suppeneva jono on rajoitettu seurauksen 2.15 nojalla. Tällöin siis resolventtioperaattori on rajoitettu. Tästä seuraa, että kun $\lambda \notin \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ niin λ on matriisin A resolventissa.

2. Olkoon seuraavaksi $A = S_+$ eli vasemmalle siirto– matriisi. S_+ näyttää siis seuraavalta:

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Tutkitaan yhtälöä $(\lambda I - S_+)x = 0$, missä $x \in \ell^p$ ja $x \neq 0$ Tällöin

$$(\lambda I - S_+)x = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & -1 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0. \tag{6.2}$$

Huomataan, että yhtälön (6.2) ei-triviaaleja ratkaisuja ovat jonot $(x_1, \lambda x_1, \dots, \lambda^n x_1, \dots)$, missä $x_1 \in \mathbb{C}$. Jos valitaan $x_1 = 1$, niin ratkaisujono on muodossa $(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{k-1}, \dots)$. Jotta $x \in \ell^p$ täytyy olla $\|x\|_p < \infty$. Silloin saadaan λ:lle ehto käyttämällä geometrisen sarjan ominaisuuksia:

$$\|x\|_p^p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^{(k-1)p} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{kp} \right) < \infty,$$

kun $|\lambda|^p < 1 \iff |\lambda| < 1$ ja $\lambda \neq 0$. Jos $\lambda = 0$, niin yhtälön (6.2) ei-triviaali ratkaisu on $x_0 = (x_1, 0, 0, \dots)$ ja selvästi $\|x_0\|_p^p < \infty$. Täten siis $\lambda = 0$ on S_+:n ominaisarvo. Silloin $|\lambda| \in [0, 1)$ ovat matriisin S_+ ominaisarvoja ja matriisin S_+ pistespektri koostuu siis avoimen yksikköympyrän sisäpisteistä.

Olkoon seuraavaksi $|\lambda| = 1$ ja tutkitaan ensin tapausta $\lambda = 1$. Tutkitaan yhtälöä $(I - S_+)x = y$, jolloin $y_k = x_k - x_{k+1}$. $(I - S_+)$ on selvästi injektio ja silloin $(I - A)^{-1}$ on olemassa. Näytetään seuraavassa, että $\mathscr{R}(I - S_+) = M$, jossa

$$M = \left\{ y \in \ell^p \middle| \sum_{k=1}^{\infty} |y_k + y_{k+1} + \dots|^p < \infty \right\}.$$

Jos $y \in \mathscr{R}(I - S_+)$ niin on olemassa yksikäsitteinen $x \in \ell^p$ siten että $(I - S_+)x = y$ eli $x = (I - S_+)^{-1}y$. $(I - S_+)$:n inverssi on yläkolmiomatriisi, jonka alkiot koostuvat

1:stä. Tällöin ratkaisuksi yhtälöön saadaan:

$$x = (I - S_+)^{-1} y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 + y_3 + \dots \\ y_2 + y_3 + y_4 + \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Koska $x \in \ell^p$ niin y:lle saadaan ehto:

$$\infty > \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k + y_{k+1} + \dots|^p .$$

Tällöin siis $\mathscr{R}(I - S_+) \subset M$. Olkoon seuraavaksi $y \in M$, ja tarkastellaan jonoa $x_k = y_k + y_{k+1} + \dots$. Tällöin selvästi $x \in \ell^p$ ja $(I - S_+)(x_k) = (I - S_+)(y_k + y_{k+1} + \dots) = (y_k)$. Tällöin siis $y \in \mathscr{R}(I - S_+)$. Siten $M = \mathscr{R}(I - S_+)$.

Osoitetaan, että M on tiheä ℓ^p:ssä. Olkoon $z \in \ell^p$. Koska avaruus $C_0(\mathbb{N})$ seurauksessa 2.15 kuuluu selvästi avaruuteen M, niin siitä seuraa, että M on tiheä avaruudessa ℓ^p. Siis M on tiheä.

Näytetään vielä että $(I - S_+)^{-1}$ on ei-rajoitettu. Valitaan jono e_k, $k = 1, 2, \dots$. Selvästi $e_k \in \mathscr{R}(I - S_+)$. Täten

$$\begin{aligned} \left\| (I - S_+)^{-1} \right\| &= \sup_{\|x\|_p = 1} \|(I - S_+)x\|_p \geq \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| (I - S_+)^{-1} e_k \right\|_p \\ &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(|1|^p + |1|^p + \dots + |1|^p \right)^{1/p} = \sup_{k \in \mathbb{N}} k^{1/p} = \infty. \end{aligned}$$

Siis inverssi on ei-rajoitettu. Siis $(I - S_+)$ on injektio, $\mathscr{R}(I - S_+)$ on tiheä ja $(I - S_+)^{-1}$ ei-rajoitettu, joten $\lambda = 1$ on S_+:n jatkuvassa spektrissä. Osoitetaan vielä, että kun $|\lambda| = 1$, niin λ on S_+:n jatkuvassa spektrissä. Jälleen

$$y_k = \lambda x_k - x_{k+1},$$

missä $|\lambda| = 1$. Olkoon $x_k = \lambda^{-k} z_k$ ja $y_k = \lambda^{-k+1} w_k$. Tällöin

$$\lambda^{-k+1}w_k = \lambda^{-k+1}z_k - \lambda^{-k+1}z_{k+1},$$

eli $w_k = z_k - z_{k+1}$, joka on tapaus $\lambda = 1$. Täten $|\lambda| = 1$ kuuluu S_+:n jatkuvaan spektriin.

Osoitetaan vielä, kun $|\lambda| > 1$ niin λ on S_+:n resolventissa. Tutkitaan resolventtioperaattoria $(\lambda I - S_+)^{-1}$. Tämä voidaan kirjoittaa toisin: $\left(\lambda\left(I - \frac{S_+}{\lambda}\right)\right)^{-1}$. S_+:n operaattorinormi on $\|S_+\| = \sup_{\|x\|_p=1} \|S_+x\|_p \leq 1$ ja ottamalla $x = (0, x_2, x_3, \ldots)$, missä $\|x\|_p = 1$, niin $\|S_+x\|_p = \|x\|_p = 1$, eli $\|S_+\| = 1$. Tällöin $\left\|\frac{S_+}{\lambda}\right\| = \frac{\|S_+\|}{|\lambda|} < 1$. Siten *Neumannin sarjan* (lause 4.16) nojalla

$$\left(I - \frac{S_+}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{S_+}{\lambda}\right)^k = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda^3} & \cdots \\ 0 & 1 & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda^2} & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Tällöin resolventtioperaattori on:

$$\left(\lambda\left(I - \frac{S_+}{\lambda}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{S_+}{\lambda}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda^3} & \frac{1}{\lambda^4} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda^3} & \ddots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda^2} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Neumannin sarjan nojalla saatu resolventtioperaattori on rajoitettu. Lisäksi matriisina resolventtioperaattori on lineaarinen. Tällöin siis kun $|\lambda| > 1$, niin λ on matriisin S_+ resolventissa.

3. Olkoon seuraavaksi A_+ summa kahdesta edellisestä matriisista. Tällöin $A_+ = A + S_+$. Matriisi A_+ näyttää siis seuraavalta:

$$A_+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

A_+ on rajoitettu seuraavasti. Käyttämällä Minkowskin epäyhtälöä saadaan

$$\begin{aligned} \|A_+x\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x_k}{k} + x_{k+1}\right|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{x_k}{k}\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1}|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} = 2\,\|x\|_p\,, \end{aligned}$$

missä $x \in \ell^p$. Tällöin $\|A_+\| \leq 2$ seurauksen 4.5 nojalla. Lisäksi $\|A_+\| > 1$, joka nähdään ottamalla $x = e_2 \in \ell^p$, sillä tällöin

$$\|A\| \geq \|Ae_2\|_p = \left(1 + \frac{1}{2^p}\right)^{1/p} > 1.$$

Tutkitaan yhtälöä $(\lambda I - A_+)x = 0$, missä $x \in \ell^p$ ja $x \neq 0$. Tällöin

$$(\lambda I - A_+)x = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda - \frac{1}{3} & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0. \tag{6.3}$$

Yhtälön (6.3) ei-triviaaleja ratkaisuja ovat jonot $\left(x_1, (\lambda-1)x_1, (\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)x_1, \dots\right)$, missä $x_1 \in \mathbb{C}$. Valitsemalla $x_1 = 1$, saadaan $\left(1, (\lambda-1), (\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right), \dots\right)$. Koska täytyy olla $x \in \ell^p$ saadaan λ:lle ehto:

$$\begin{aligned}\|x\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p &= 1 + |\lambda - 1|^p + |\lambda - 1|^p \left|\lambda - \frac{1}{2}\right|^p + \dots \\ &= 1 + |\lambda - 1|^p + |\lambda - 1|^p \left|\lambda - \frac{1}{2}\right|^p + \dots < \infty.\end{aligned}$$

Olkoon $|\lambda| \neq 1$. Tutkitaan suhdetestillä, milloin annettu sarja suppenee. Täten

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{|\lambda - 1|^p \cdots \left|\lambda - \frac{1}{n}\right|^p}{|\lambda - 1|^p \cdots \left|\lambda - \frac{1}{n-1}\right|^p} \right| = \lim_{n\to\infty} \left|\lambda - \frac{1}{n}\right|^p = |\lambda|^p.$$

Sarja suppenee, kun $|\lambda|^p < 1 \iff |\lambda| < 1$ ja hajaantuu, kun $|\lambda|^p > 1 \iff |\lambda| > 1$. Kun siis $|\lambda| \in [0, 1)$, eli yksikköympyrän sisäpisteet, niin λ on A_+:n pistespektrissä.

Olkoon seuraavaksi $\lambda = 1$. Tällöin summa

$$\|x\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = 1 + |\lambda - 1|^p + |\lambda - 1|^p \left|\lambda - \frac{1}{2}\right|^p + \dots = 1.$$

Eli $\lambda = 1$ on A_+:n pistespektrissä.

Osoitetaan, että kun $|\lambda| > \|A_+\|$, niin λ on A_+:n resolventissa. Tällöin $\left\|\frac{A_+}{\lambda}\right\| = \frac{\|A_+\|}{|\lambda|} < 1$. Edellä saatiin, että $1 < \|A_+\| \leq 2$. Kun $|\lambda| > \|A_+\|$, niin voidaan käyttää *Neumannin sarjaa* operaattorin $(\lambda I - A_+)^{-1} = \left(\lambda\left(I - \frac{A_+}{\lambda}\right)\right)^{-1}$ laskemiseksi ja tällöin saatu operaattori on lineaarinen ja rajoitettu. Kun siis $|\lambda| > \|A_+\|$, niin λ on A_+:n resolventissa.

Olkoon seuraavaksi $1 < |\lambda| \leq \|A_+\|$. Tällöin summa

$$\|x\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{k} \left|\lambda - \frac{1}{n}\right|^p = \infty,$$

kun n on tarpeeksi iso. Siis $\lambda I - A_+$ on injektio ja $(\lambda I - A_+)^{-1}$ siis olemassa. Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathscr{R}(\lambda I - A_+) = P$, missä

$$P = \left\{ y \in \ell^p \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{y_k}{\lambda - \frac{1}{k}} + \frac{y_{k+1}}{\left(\lambda - \frac{1}{k}\right)\left(\lambda - \frac{1}{k+1}\right)} + \dots \right|^p < \infty \right. \right\}.$$

Jos $y \in \mathscr{R}(\lambda I - A_+)$ niin on olemassa yksikäsitteinen $x \in \ell^p$ siten että $x = (\lambda I - A_+)^{-1} y$. Operaattorin $(\lambda I - A_+)$ inverssi on jälleen yläkolmiomatriisi. Tällöin ratkaisuksi saadaan

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-1} & \frac{1}{(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)} & \frac{1}{(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{\lambda-\frac{1}{2}} & \frac{1}{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda-\frac{1}{3}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{\lambda+1} + \frac{y_2}{(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)} + \cdots \\ \frac{y_2}{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)} + \frac{y_3}{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)} + \cdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Koska $x \in \ell^p$, niin y:lle saadaan ehto:

$$\infty > \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{y_k}{\lambda - \frac{1}{k}} + \frac{y_{k+1}}{\left(\lambda - \frac{1}{k}\right)\left(\lambda - \frac{1}{k+1}\right)} + \dots \right|^p.$$

Siten $\mathscr{R}(\lambda I - A_+) \subset P$. Olkoon seuraavaksi $y \in P$ ja tarkastellaan jonoa $x = (x_k) = \left(\frac{y_k}{\lambda-\frac{1}{k}} + \frac{y_{k+1}}{\left(\lambda-\frac{1}{k}\right)\left(\lambda-\frac{1}{k+1}\right)} + \dots\right)$. Tällöin selvästi $x \in \ell^p$ ja $(\lambda I - A_+)(x_k) = (\lambda I - A_+)\left(\frac{y_k}{\lambda-\frac{1}{k}} + \frac{y_{k+1}}{\left(\lambda-\frac{1}{k}\right)\left(\lambda-\frac{1}{k+1}\right)} + \dots\right) = (y_k)$. Tällöin siis $y \in \mathscr{R}(\lambda I - A_+)$ ja $P \subset \mathscr{R}(\lambda I - A_+)$. Siten $\mathscr{R}(\lambda I - A_+) = P$.

Osoitetaan, että P on tiheä. Jälleen joukko $C_0(\mathbb{N}) \subset P$ ja koska $C_0(\mathbb{N})$ on tiheä ℓ^p:ssä niin tästä seuraa että P on tiheä ℓ^p:ssä.

Kuitenkaan ei voida sanoa varmaksi, että kun $1 < |\lambda| \leq \|A_+\|$ niin λ olisi A_+:n jatkuvassa spektrissä, sillä valitsemalla jono e_k, $(k = 1, 2, \dots)$ saadaan

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\|(\lambda I - A_+)^{-1} e_k\right\|_p = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{k} \left| \frac{1}{\lambda - \frac{1}{n}} \right|^p \right),$$

ja saadun sarjan termit riittävän suurilla n:n arvoilla lähestyvät arvoa $0 < \left|\frac{1}{\lambda}\right|^p < 1$, joten sarja suppenee. Alueesta $1 < |\lambda| \leq \|A_+\|$ on siis vaikea sanoa mitään varmaa, kuuluuko jokin osa siitä jatkuvaan spektriin ja osa resolventtijoukkoon. Tiedetään kuitenkin, että tässä alueessa inverssi on olemassa ja $\mathscr{R}(\lambda I - A_+)$ on tiheä.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta $|\lambda| = 1$ ja $\Re(\lambda) \leq 0$, eli yksikköympyrän vasemmanpuoleinen kehän osa. Tällöin ratkaisujonon $\left(1, (\lambda - 1), (\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right), \ldots\right)$ termit eivät suppene, joten sen p–normi on ääretön, eli $(\lambda I - A_+)$ on injektio ja $(\lambda I - A)^{-1}$ siis olemassa. Kuten edellä saatiin $\mathscr{R}(\lambda I - A_+) = P$ ja P on tiheä. Matriisin A_+:n ollessa rajoitettu, niin kehä ei voi kuulua resolventtijoukkoon, sillä resolventtijoukon on oltava avoin. Toisaalta vasemmanpuoleinen kehä ei kuulu residuaalispektriin, koska kuva-avaruus oli tiheä, eikä pistespektriin, koska p–normi ei ollut olemassa ratkaisujonolle. Jäljelle jää siis jatkuva spektri. Tästä voidaan päätellä, että kun $|\lambda| = 1$ ja $\Re(\lambda) \leq 0$, niin λ kuuluu A_+:n jatkuvaan spektriin.

Olkoon seuraavaksi $|\lambda| = 1$ ja $\Re(\lambda) > 0$, eli yksikköympyrän kehän oikea puoli. Tällöin voidaan käyttää äärettömän tulon ominaisuuksia (esim. [3]), jolloin nähdään, että sarjan $1 + |\lambda - 1|^p + |\lambda - 1|^p \left|\lambda - \frac{1}{2}\right|^p + \ldots$ termit lähestyvät nollaa. Se ei kuitenkaan takaa sarjan suppenemista. Ei voida tarkalleen sanoa mihin spektrin osaan yksikköympyrän oikea puoli (tapausta $\lambda = 1$ lukuun ottamatta) kuuluu ja tämä jätetään tässä diplomityössä avoimeksi ongelmaksi.

Yhteenvetona siis jos $|\lambda| < 1$, niin λ kuuluu A_+:n pistespektriin. Jos $|\lambda| = 1$ ja $\Re(\lambda) \leq 0$, niin λ kuuluu A_+:n jatkuvaan spektriin. Jos $|\lambda| > \|A_+\|$ niin λ kuuluu A_+:n resolventtijoukkoon. Alueita $(1 < |\lambda| \leq \|A_+\|)$ ja $(|\lambda| = 1, \Re(\lambda) > 0)$ ei pystytä tarkasti määrittelemään, paitsi että oikeanpuoleinen yksikköympyrän kehä kuuluu A_+:n spektriin. Ei kuitenkaan voida varmuudella sanoa tämän diplomotyön puitteissa, mitä spektrin osaa se on.

Kuten tässä luvussa on nähty, on mahdollista määrittää ääretönulotteisten matriisien avulla operaattoreiden spektri ja resolventtijoukko. Mikäli matriisi ei ole muodoltaan yksinkertainen, kuten diagonaalimatriisi, on spektrin ja resolventtijoukon määritys hankalaa. Tämä nähtiin viimeisessä esimerkissä. Tutkimusongelmana esimerkiksi kahden operaattorin – joiden spektri ja resolventtijoukko tunnetaan– summaoperaattorin spektrin ja resolventin selvittäminen olisi mielenkiintoinen. Yleistä teoriaa tällaiselle tapaukselle ei ole olemassa, sillä harvoin ominaisvektorit ovat samat kummallekin operaattorille.

7. YHTEENVETO

Tässä työssä tarkasteltiin ääretönulotteisia matriiseja ja jonoavaruuksia. Ensin tarkasteltiin jonoja, jotka ajateltiin ääretönulotteisina vektoreina. Työssä esiteltiin näiden jonojen muodostamien avaruuksien ominaisuuksia, kuten normi ja sisätulo. Lisäksi tarkasteltiin jonojen yleisiä ominaisuuksia, kuten suppeneminen ja Cauchy-jono. Työn alussa esitettiin tärkeimmät jonoavaruudet, joita käytettiin myöhemmin työssä, kuten avaruudet ℓ^p ja ℓ^∞.

Toisena tässä työssä tarkasteltiin ääretönulotteisia matriiseja sellaisenaan. Työssä määriteltiin ääretönulotteisten matriisien peruslaskutoimitukset ja tarkasteltiin eroja äärellisulotteisten ja ääretönulotteisten matriisien välillä. Lisäksi osoitettiin, milloin ääretönulotteisella matriisilla on olemassa ja inverssi ja esitettiin muutaman matriisin inverssi. Luvun toinen osa keskittyi matriisin rajan esittelyyn ja siihen, miten se suhtautuu ääretönulotteisen matriisin inverssiin ja todistettiin muutama lause tähän liittyen. Luvun lopussa esiteltiin riittäviä ja välttämättömiä ehtoja siihen, että ääretönulotteinen matriisi voi kuvata jonoja tai sarjoja toiseksi raja-arvon säilyttäen ja esiteltiin tällaisia matriiseja. Näitä ehtojen toteuttavia matriisia sanottiin joko $K-$ tai $T-$ matriisiksi, riippuen siitä millaiset ehdot matriisi toteutti.

Kolmantena tässä diplomityössä tarkasteltiin lineaarisia ja rajoitettuja operaattoreita ja tutkittiin niiden perusominaisuuksia. Myös lineaarisen ja rajoitetun operaattorin inverssi käsiteltiin ja lisäksi todistettiin miten *Neumannin sarjan* avulla voidaan muodostaa operaattorin inverssi. Loppuosassa käsiteltiin lineaarisen ja rajoitetun operaattorin spektriä ja resolventtijoukkoa.

Neljäntenä käsiteltiin lineaaristen ja rajoitettujen operaattoreiden esittämistä ääretönulotteisina matriiseina. Kappaleessa todistettiin kaksi tärkeää lausetta näihin liittyen, *Silverman-Toeplitzin* lause ja *Kojima-Schurin* lause. Luvussa käsiteltiin myös muita matriiseja, kuten diagonaalimatriisia ja annettiin tällaiselle matriisille riittävät ja välttämättömät ehdot, että diagonaalimatriisi esittää lineaarista ja rajoitettua operaattoria. Huomattiin, että tärkeintä on, että diagonaalialkiot muodostavat suppenevan jonon kuva-avaruudessa. Luvun menetelmiä seuraten on mahdollista muodostaa myös muiden jonoavaruuksien välille matriisikuvaus.

Viimeisenä tutustuttiin ääretönulotteisen matriisin resolventtijoukkoon ja spektriin. Kappaleessa otettiin esimerkinomaisesti tarkastellun alle kaksi lineaarista ja rajoitettua operaattoria, eli diagonaalioperaattori ja vasemmalle siirto-operaattori ja määritettiin niiden resolventtijoukko ja spektri. Kappaleen loppupuolella tarkasteltiin myös näistä kahdesta operaattorista summaamalla muodostettua operaattoria ja etsittiin tällaisen matriisin spektrin osia. Tarkasteluissa vaikutti siltä, että matriisin ollessa vähänkin monimutkainen, sen resolventin ja spektrin määrittäminen on haastavaa. Jopa tällaisissa yksinkertaisissa matriiseissa oli jonkin spektrin osan tarkka määrittäminen hankalaa.

Tämän työn tavoite oli saada yleistajuinen esitys ääretönulotteisista matriiseista ja niiden käytöstä. Kuten lähdeteoksissakin mainittiin, mitään yleistä teoriaa ei ole olemassa ääretönulotteisille matriiseille ja tämä muodostaa aiheesta mielenkiintoisen ongelman. Joitain lauseita voitiin todistaa ääretönulotteisille matriiseille, mutta muuten tarkastelu rajoittui esimerkkeihin. Jatkotutkimuksena esimerkiksi äärellisulotteisten matriisien teorian yleistys äärellisulotteisiin matriiseihin voisi olla olla sopiva tutkimuskohde. Lisäksi ääretönulotteisten matriisien käyttö operaattoreina voisi olla moniulotteinen ongelma. Tämän työn valossa ääretönulotteisten matriisien käsittely vaatii todella paljon tarkkuutta ja esimerkiksi erikoistapaukset on syytä tutkia tarkkaan. Tämä diplomityö kuitenkin osoittaa, että ääretönulotteisella matriisilla on sovelluskohteensa matematiikan eri haaroissa.

LÄHTEET

[1] J.Boos, Classical and Modern Methods of Summability, 2000.

[2] R.G. Cooke, Infinite Matrices and Sequence Spaces, 1950.

[3] P. Dienes, The Taylor Series, 1957.

[4] C. M. Goertzen, Operations on Infinite x Infinite Matrices and their use in Dynamics and Spectral Theory, 2013.

[5] H.R Dowson, Spectral Theory of Linear Operators, 1978.

[6] G.H Hardy, Divergent Series, 1949.

[7] G. Heinig ja K. Rost, Algebraic Methods for Toeplitz-like Matrices and Operators, 1984.

[8] B.D Maccluer, Elementary Functional Analysis, 2009.

[9] A. Bötcherr, B. Silbermann ja A.Y Karlovich, Analysis of Toeplitz Operators, 1987.

[10] I.J Maddox, Elements of Functional Analysis, 1970.

[11] I.J Maddox, Infinite Matrices of Operators, 1980.

[12] M. Mursaleen, Applied Summability Methods, 2014.

[13] A. W. Naylor ja G.R. Sell, Linear Operator Theory in Engineering and Science, 1982.

[14] S. Pohjolainen, Introduction to Functional Analysis - luentomoniste

[15] B. Ruder, The Silverman-Toeplitz Theorem, 1964.

[16] P.N Shivakumar ja K.C Sivakumar, A Review of Infinite Matrices and their applications, 2008.

[17] A. Taylor ja D.C Lay, Introduction to Functional Analysis, 1958.

[18] W.F Trench, Introduction to Real Analysis, 2003.